

平成30年度4月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学専攻

入学者選抜試験問題

【専門科目】

平成29年7月15日 13:00 - 14:30

- (1) 指示があるまで問題を見てはならない。
- (2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。
- (3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。
- (4) 専門科目は全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から1題選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の若い順に1題のみ採点を行う。
- (5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
- (6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答に際して裏面を用いる場合は解答用紙の指示に従って解答すること。
- (7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 次の各問のそれぞれに答えよ. なお \mathbb{C} は複素数の全体, \mathbb{Z} は整数の全体を表す.

問1 X は \mathbb{C} 上の Banach 空間で, そのノルムを $\| \cdot \|_X$ と表す. また Y は \mathbb{C} 上のノルム線型空間で, そのノルムを $\| \cdot \|_Y$ と表す. X を定義域とする線型作用素 $A: X \rightarrow Y$ が, ある正数 C_1, C_2 に対して

$$C_1 \|x\|_X \leq \|Ax\|_Y \leq C_2 \|x\|_X$$

を満たしているとき, 次の設問に答えよ.

(1) 作用素 A の値域 $R(A)$ は Y の閉部分空間であることを示せ.

(2) $f \in R(A)$ に対して作用素方程式 $Ax = f$ の解 x は唯1つ存在し, さらに f から x への対応が連続であることを示せ.

問2 i を虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ とする. $-\pi \leq x \leq \pi$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

により数列 $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を定める. $f(x)$ が $(x = -\pi, \pi)$ で周期境界条件を満たす実解析関数であるとき, ある正数 C と 1 よりも大きい正数 ρ が存在して

$$|c_n| \leq \frac{C}{\rho^{|n|}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

が成立することを示せ. なお $f(x)$ が $-\pi \leq x \leq \pi$ 上の周期境界条件を満たす実解析関数であるとは, $f(x)$ は $-\pi \leq x \leq \pi$ の各点において正の収束半径をもつ冪級数によって表され, さらに $x = -\pi, \pi$ における冪級数の係数が一致していることをいう.

2 次の各問のそれぞれに答えよ.

問1 i を虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ とする. N を正の整数とし, 区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義される $f(x)$ は $(2N+1)$ 個の定数 $\{c_n\}_{n=-N}^N$ を用いて

$$f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

と表されている. この $f(x)$ の定積分に対して台形公式を適用する. すなわち $[-\pi, \pi]$ を $2N$ 等分して $h = \frac{\pi}{N}$, $x_n = nh$ ($-N \leq n \leq N$) と定めて台形公式

$$I_N = h \sum_{n=-N}^{N-1} f(x_n)$$

を考える. このとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = I_N$$

が成立することを示せ.

問2 常微分方程式の初期値問題

$$y'' + xy' + y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

を満たす未知関数 $y(x)$ を求めよ.

問3 Γ は平面 \mathbb{R}^2 上の滑らかな単純閉曲線で, Γ で囲まれる単連結領域を D とする. また平面上の点 (x_1, x_2) を x と表すことにする. Γ 上の連続関数 f を与えて, 次の調和関数の Neumann 問題を考える:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= 0, & x \in D, \\ \frac{\partial}{\partial n} u(x) &= f(x), & x \in \Gamma. \end{aligned}$$

ここで $\frac{\partial}{\partial n}$ は Γ 上で定義される外向き法線微分である. この境界値問題の古典解 $u(x)$ ($x \in D \cup \Gamma$) が存在するとき, 次の設問に答えよ. なお $d\sigma$ は Γ 上の線素を表す.

(1) f は $\int_{\Gamma} f d\sigma = 0$ を満たすことを示せ.

(2) $x = (x_1, x_2) \neq 0$ に対して $E(x) = \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ とする. このとき $x \in D$ に対して,

$$u(x) = - \int_{\Gamma} E(x-y) f(y) d\sigma_y + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) u(y) d\sigma_y$$

が成立することを示せ.

3

次の各問のそれぞれに答えよ.

問1 \mathbb{R}^3 の点 \mathbf{x} をデカルト座標 $O - x_1, x_2, x_3$ を用いて $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ と表す. このとき, 積分

$$\int_{S^+} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x})|} dS$$

の値を求めよ. ここに, $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2/4$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + 2x_3)^T$, 曲面 S^+ は $S^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = 1, x_3 > 0\}$ であり, dS は S^+ の面素である.

問2 C は反時計回りに向き付けられた複素平面内の滑らかな単純閉曲線で, C に囲まれた領域は内部に原点を含むものとする. このとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\int_C \left(\frac{1}{z} + \cos z + e^z \right)^3 dz$$

問3 A を n 次の実正方行列, I を n 次の単位行列とする. $n \geq 2$ のとき, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ を与えて $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ を求める線形方程式

$$(I + A)\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (*)$$

を考える. \mathbb{R}^n にあるノルムを定義したとき, 対応する行列 A の作用素ノルム $\|A\|$ は $\|A\| < 1$ を満たすものとする. このとき, 次の問に答えよ. ただし, すべての計算は厳密に行われているものとする.

- (1) 行列 $I + A$ は正則であることを示せ.
- (2) $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ を方程式 (*) の唯一解であるとする. $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ を与え, さらに漸化式

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_i \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (**)$$

を用いて $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ を定める. このとき, $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}^*$ となることを示せ.

- (3) (2) で定めた $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$ がある整数 $m \geq 0$ において初めて $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}^*$ を満たすとき, (**) は m 回の反復で解に至るということにする. 行列 A が, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ と全ての \mathbf{b} に対して (**) が有限回の反復で解に至るという性質を有しているとき, 次の設問に答えよ.
 - (3-1) 行列 A の固有値の絶対値の最大の値 (A のスペクトル半径) を求めよ.
 - (3-2) 全ての \mathbf{b} と全ての \mathbf{x}_0 に対して, (**) は有限回の反復で解に至ることを示せ.
 - (3-3) ある固定した \mathbf{b} と \mathbf{x}_0 に対して (**) が m 回の反復で解に至るとき, $m \leq n$ であることを示せ. さらに, $m = n$ となるような $A, \mathbf{b}, \mathbf{x}_0$, および, この A に対して作用素ノルムが $\|A\| < 1$ となるような \mathbb{R}^n のノルムの例を 1 組示せ.