平成29年度4月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程
複雑系科学専攻

入学者選抜試験問題

【専門科目】

平成28年7月16日 13:00 - 14:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 専門科目は全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から1題選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の若い順に1題のみ採点を行う。

(5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答に際して裏面を用いる場合は解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1 a を実数とし，正数 α, β に対して $R_{\alpha,\beta}$ と $R_{\alpha,\beta,\beta}$ を

$$R_{\alpha,\beta} = \{(t,x) \mid 0 \le t \le \alpha,\ |x-a| \le \beta\},$$
$$R_{\alpha,\beta,\beta} = \{(t,x,y) \mid 0 \le t \le \alpha,\ |x-a| \le \beta,\ |y-a| \le \beta\}$$

とする．$R_{\alpha,\beta}$ 上の実数値連続関数 $f(t,x)$ に対して，常微分方程式の初期値問題

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x) \quad (t>0), \qquad x(0) = a$$

を考えるとき，以下の設問に答えよ．

(1) 次の 2 つの条件 (a),(b) を満たす $R_{\alpha,\beta,\beta}$ 上の C^1 級の実数値関数 $\varphi(t,x,y)$ が存在すれば，初期値問題 $(*)$ の解は一意的であることを示せ．

条件 (a): $\varphi(t,x,y)$ は非負値で，$\varphi(t,x,y)=0$ となることと $x=y$ とは同値である．

条件 (b): $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x,y) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x,y)\right)f(t,x) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\varphi(t,x,y)\right)f(t,y) \le 0.$

(2) $f(t,x)$ が正数 L に対して Lipschitz 条件

$$|f(t,x)-f(t,y)| \le L|x-y|, \qquad (t,x),(t,y) \in R_{\alpha,\beta}$$

を満たしているとき，(1) の条件 (a),(b) を満たす $\varphi(t,x,y)$ の具体例を 1 つ挙げよ．

問 2 複素数上の線型空間 $\ell^2 = \left\{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \mid \text{各 } x_k \text{ は複素数で } \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 \text{ は有界}\right\}$ に内積 $(\ ,\ )$ を

$$(**) \qquad (x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}, \qquad x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty},\ y=\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$$

と定めるとき，以下の設問に答えよ．

(1) ここで定めた内積によって ℓ^2 は複素 Hilbert 空間であることを，完備性の定義に基づいて示せ．なお $(**)$ による $(\ ,\ )$ が ℓ^2 の内積であることは既知であるとしてよい．

(2) $x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$ に対して $Kx = \left\{\frac{x_k}{1+k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ によって ℓ^2 上の線型作用素 K を定義する．このとき K は ℓ^2 上の有界線型作用素であることを示せ．

(3) 線型作用素 K の値域 $R(K)$ は ℓ^2 の閉部分空間であるか．理由をつけて答えよ．

(4) I を ℓ^2 上の恒等作用素，K^* を K の共役 (adjoint) 作用素，すなわち

$$(Kx,y) = (x,K^*y), \quad x,y \in \ell^2$$

を満たすものとする．このとき正数 α に対して ℓ^2 上の線型作用素 $\alpha I + K^*K$ は，ℓ^2 上で有界な逆作用素をもつことを示せ．

2　次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　xy 平面上の実数 t をパラメータとする曲線族 $(x-1)^2+y^2+2tx=0$ と常に直交する曲線で，点 $(x,y)=(1,2)$ を通るものを，この点の近傍で求めよ．ただし 2 つの曲線が直交するとは，交点における両者の接線が直交することをいう．

問 2　正数 x に対して，ガンマ関数を

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

によって定義する．このとき $0<x<1$ に対して

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

が成立することを示せ．なお，必要があれば，ベータ関数

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \qquad (x>0,y>0)$$

とガンマ関数の関係

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (x>0,y>0)$$

を利用してもよい．

問 3　$(\ ,\ )$ を数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積とする．行列 A は n 次の実対称行列で，2 次形式 (Ax,x) の制約条件 $(x,x)=1$ のもとでの最大値を M, 最小値を m とし，m は正数であるとする．このとき，行列 A のいずれの固有ベクトルとも一致しない $x_0\in\mathbb{R}^n$ $(x_0\neq 0)$ を与えて，$\mathbb{R}^n$ の列 $\{\xi_k\}$, $\{x_k\}$ を

$$\xi_k=Ax_{k-1},\quad x_k=\frac{\xi_k}{(\xi_k,\xi_k)^{1/2}} \qquad (k\geq 1)$$

によって定める．極限値

$$\lim_{k\to\infty}(\xi_k,\xi_k)$$

を求めよ．

3

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1 S^+ を $\mathbb{R}^3$ の上半単位球面 $S^+ = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\, x_3 > 0 \right\}$ とする．また，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の積分の値を求めよ．

$$\int_{S^+} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x}\, dS$$

ここに，dS は S^+ の面積要素である．

問 2 次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{x \cos x^2}{x^4 + 1} dx$$

問 3 次の常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \quad (0 < t < T), \qquad x(0) = a$$

を考える．ここに a は与えられた正の数であり，T はこの問題の解 $x(t)$ が $0 < t < T$ で存在するように選んだ正の数である．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) この問題の解 $x(t)$ を求めよ．また，与えられた a に対して，上記の条件を満たす T の上限を求めよ．

(2) この初期値問題に前進 Euler 法を適用することを考える．正数 h を t 方向の増分とし，非負の整数 n に対して $x(nh)$ に相当する値を x_n と表すとき，x_n から x_{n+1} を決定する式を求めよ．ただし，$x_0 = a$ とする．

(3) (2) で前進 Euler 法の代わりに後退 Euler 法を適用して x_n から x_{n+1} を実数の範囲で決定できる場合，x_n から x_{n+1} を決定する式を求めよ．ただし，x_{n+1} の選択肢が複数あるときは，x_n に最も近いものを x_{n+1} とせよ．

(4) 計算を厳密に行った場合，(2) の前進 Euler 法では任意の非負の整数 n に対して x_n を決定できること，及び，(3) の後退 Euler 法では，a と h に依存する非負の整数 $N(a,h)$ があって $n = N(a,h)$ では x_n から x_{n+1} を実数の範囲で決定できないことを示せ．

(5) (4) で定められた $N(a,h)$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{h \to +0} a\, N(a,h)\, h$ は有限確定か．有限確定であればその値を求めよ．

4

格子気体モデルでは，気体が入っている容器の空間を気体分子が1つ入る程度の大きさ（微少体積v_0）のセルで格子状に分割する．i番目のセルの状態n_iを，セルiに気体分子が存在するとき$n_i=1$，存在しないとき$n_i=0$として表すとき，この格子気体の系のエネルギーは

$$E=-\varepsilon\sum_{(i,j)}n_in_j.$$

で与えられる．ここで，$\sum_{(i,j)}$は隣接するセルの全ての組についての和を表し，正数εは相互作用の強さを表すパラメータである．セルの総数Mおよび気体分子数Nは十分大きく，系は絶対温度Tの熱平衡状態にあると仮定する．ボルツマン定数をkとして，以下の問に答えよ．

(1) この系のエネルギーEにおける総和$\sum_{(i,j)}$を厳密に計算するのは一般に困難である．そこで，各セルに隣接するセルの個数をzとし，セルiの状態n_iを平均的な確率の値で置き換える平均場近似を用いることで，この系の内部エネルギーを求めよ．

以下の問では，前問(1)で用いた平均場近似を仮定して答えよ．

(2) この系のエントロピーSを求めよ．

(3) この系の自由エネルギーFを求めよ．

(4) この系の体積Vは$V=Mv_0$と表される．また，V_0を$V_0=Nv_0$で定義する．MとNの代わりに，VとV_0を用いて，この系の圧力Pを表せ．

(5) 一般に通常の気体では体積が減少すると圧力は増加するが，この系はある臨界温度T_c以下では異なる性質を示す．臨界温度T_cを求めよ．

(6) (4)で求めたPに関して，十分密度が低い状態を考え，V_0/Vの2次のオーダーまでの近似式を求めよ．さらに，高温極限および低温極限におけるこの近似のもとでの圧力Pは，それぞれ理想気体の圧力より大きいか小さいかを，物理的な理由も含めて答えよ．

5

次の各問のそれぞれに答えよ.

問 1

下図のように，中心軸が鉛直方向を向いた半径 R の円筒形容器の中に，密度 ρ，粘性係数 $\tilde{\mu}$ の非圧縮性粘性流体が深さ h まで入れてあるとする．この容器を中心軸のまわりに角速度 ω で反時計回りに十分長い時間のあいだ回転させると，流体の速度場は

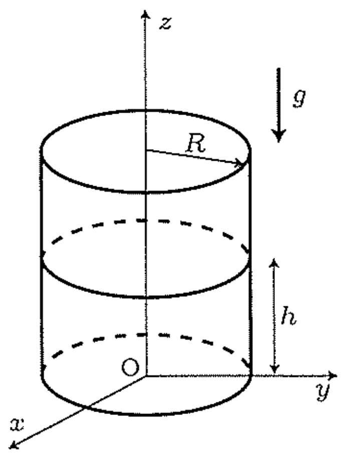
$$u = -\alpha y, \quad v = \alpha x, \quad w = 0$$

となる．ここで，O-xyz はデカルト座標系であり，x, y は水平方向座標，z は鉛直上向き座標である．また，原点 O は容器の底面の中心にとる．そして，u, v, w は，それぞれ x, y, z 方向の流体速度成分であり，α は定数である．また，重力加速度の大きさを g とする．なお，容器の回転は十分遅く，流体の自由表面が容器の底あるいは上面に達することはないものとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $R, h, \tilde{\mu}, \rho, \omega, g$ の中の必要なものを用いて α を表せ.

(2) 流体中の点 (x, y, z) における圧力 p の値を求めよ．ただし，原点 O における圧力は p_0 であるとする.

(3) 流体の圧力は自由表面で一定の値をとると仮定して，自由表面の容器の中心軸上での高さと容器の側壁での高さの差を，$\alpha, R, h, \tilde{\mu}, \rho, g$ の中の必要なものを用いて表せ.



問 2 は次ページにある.

問 2

重力等の体積力が無視できる場合の弾性体の運動を考える．O-$x_1x_2x_3$ はデカルト座標系であり，弾性体の応力テンソルの i, j 成分 σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ は，x_j が一定の平面を通して，x_j の大きい側が小さい側に及ぼす応力の x_i 方向成分を表すとする．また，t は時間である．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 弾性体中の密度 ρ の微小部分の運動方程式は

$$\rho\alpha_j = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i}, \qquad (j = 1, 2, 3)$$

と表されることを示せ．ここで，α_j は微小部分の加速度の x_j 成分である．

(2) ひずみテンソルの i, j 成分を κ_{ij} としたとき，応力テンソルの各成分とひずみテンソルの各成分は，定数 λ, μ を用いた等方的フック弾性体の関係

$$\sigma_{ij} = \lambda \left(\sum_{\ell=1}^{3} \kappa_{\ell\ell} \right) \delta_{ij} + 2\mu\kappa_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

を満たしているとする．ここで，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．このとき，この弾性体中の密度 ρ の微小部分の運動方程式は次のように書けることを示せ．

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\ \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{s}) + \mu\Delta\boldsymbol{s}$$

ここで，$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, t)$ は初期に $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ の位置にあった微小部分の時刻 t での微小な変位を表す．また，Δ はラプラシアンである．

(3) (2) で示された等方的フック弾性体の関係を満たす弾性体中を伝わる微小振幅の縦波と横波の弾性波の速さをそれぞれ求めよ．ただし，波のない状態での弾性体の密度は一定値 ρ_0 であるとする．