平成28年度4月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程
複雑系科学専攻

入学者選抜試験問題

【専門科目】

平成27年7月19日 13:00 – 14:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 専門科目は全部で6題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から1題選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の若い順に1題のみ採点を行う。

(5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答に際して裏面を用いる場合は解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　$0 \leq \kappa < 1$ とする．$u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ は実数 $\mathbb{R}$ 上の C^1 級実数値関数で次の常微分方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} &u'(x) = v(x)w(x), \qquad && v'(x) = -u(x)w(x), \qquad && w'(x) = -\kappa^2 u(x)v(x), \\ &u(0) = 0, && v(0) = 1, && w(0) = 1 \end{aligned}$$

を満たしているとする．

(1) $\bigl(u(x)\bigr)^2 + \bigl(v(x)\bigr)^2 = 1$ が成立することを示せ．

(2) $v(x)$ は偶関数であり，また $v(x_0) = 0$ となるような x_0 が存在することを示せ．

問 2　X は $(\ ,\ )$ で表される内積をもつ可分な複素ヒルベルト空間で，$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X の 1 組の完全正規直交系とする．$x \in X$ に対して

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x, e_n)}{\sqrt{1+n^2}} e_n$$

によって X 上の線型作用素 A を定める．このとき複素数 λ (ただし $\lambda \neq 0$) に対して

$$X_\lambda := \{\, x \in X \mid (A - \lambda)x = 0 \,\}$$

とすると，線型空間 X_λ の次元は有限次元であることを示せ．

2 次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　定積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\, dx$$

の値を求めよ．

問 2　偏微分方程式の初期値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 = 0 \quad (|t| < 1), \qquad u(0, x) = \frac{1}{2}\sin x$$

を満たす関数 $u(t, x)$ を 1 つ求めよ．

問 3　複素数 $\{a_{ij}\}_{1 \le i \le 3,\, 1 \le j \le 3}$ は

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|, \quad |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|, \quad |a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$$

を満たしている．このとき複素数 b_1, b_2, b_3 を与えたときに

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{a_{11}}\{b_1 - a_{12}y_n - a_{13}z_n\} \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{a_{22}}\{b_2 - a_{21}x_n - a_{23}z_n\} \qquad\qquad (n \ge 0) \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{a_{33}}\{b_3 - a_{31}x_n - a_{32}y_n\} \end{cases}$$

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1$$

によって生成される数列 $\{x_n\}_{n\ge0}$, $\{y_n\}_{n\ge0}$, $\{z_n\}_{n\ge0}$ は収束列であることを示せ．
また

$$\begin{array}{llllll} a_{11} = 3, & a_{12} = 0, & a_{13} = 1, & a_{21} = -1, & a_{22} = 3, & a_{23} = 1, \\ a_{31} = 0, & a_{32} = 2, & a_{33} = 3, & b_1 = 0, & b_2 = 7, & b_3 = 11 \end{array}$$

とした場合に，3 つの数列 $\{x_n\}_{n\ge0}$, $\{y_n\}_{n\ge0}$, $\{z_n\}_{n\ge0}$ の極限値を求めよ．

3

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1 S^+ を $\mathbb{R}^3$ の上半単位球面 $S^+ = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 > 0\}$ とする．また，$\phi(x_1, x_2, x_3)$ は $\mathbb{R}^3$ で定義された滑らかな関数で，$\phi(x_1, x_2, 0) = 1$ を満たすものとする．このとき，次の積分の値を求めよ．

$$\int_{S^+} \boldsymbol{x} \times \nabla\phi \, dS$$

ここに，dS は S^+ の面積要素である．

問 2 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$ の Fourier 変換

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

を計算せよ．

問 3 A は正定値な n 次実対称行列であり，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を求めることと，$J(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})/2 - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})$ を最小にする $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を求めることは同値であることを示せ．ここに $(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積である．

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解法である共役勾配法のアルゴリズムは次のように表される:

1: 初期値 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ を任意に選んで，$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{r}_0$，$k = 0$ とする．
2: $\alpha_k = \boxed{\text{(a)}}$，$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_k$，$\boldsymbol{r}_{k+1} = \boldsymbol{r}_k - \alpha_k A\boldsymbol{p}_k$．
3: $\sqrt{(\boldsymbol{r}_{k+1}, \boldsymbol{r}_{k+1})}$ が十分小であれば終了．
4: $\beta_k = -(\boldsymbol{r}_{k+1}, A\boldsymbol{p}_k)/(\boldsymbol{p}_k, A\boldsymbol{p}_k)$，$\boldsymbol{p}_{k+1} = \boldsymbol{r}_{k+1} + \beta_k \boldsymbol{p}_k$．
5: $k + 1 \to k$ として 2: へ戻る．

ここに，$\boldsymbol{x}_k$ は第 k $(k \geq 0)$ 反復における近似解，$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_k$ は $\boldsymbol{x}_k$ に対する残差，$\boldsymbol{p}_k$ は $\boldsymbol{x}_k$ における次の探索方向である．このとき，(a) に入る数式を，与えられた $\boldsymbol{x}_k$ と $\boldsymbol{p}_k$ に対して $J(\boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_k)$ が最小になるように決定せよ．また，4: の $\boldsymbol{p}_{k+1}$ は，$(A\boldsymbol{p}_{k+1}, \boldsymbol{p}_k) = 0$ を満たすことを示せ．ただし，$\boldsymbol{r}_0 \neq \boldsymbol{0}$ とし，$k \geq 0$ に対して，このアルゴリズムで得られた残差が $\boldsymbol{r}_k \neq \boldsymbol{0}$ を満たせば $\boldsymbol{p}_k \neq \boldsymbol{0}$ であることを証明なしに用いてよい．

(3) n 個の実数 $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$ に対して，行列 A の (i, j) 成分 a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ が

$$a_{ii} = 1 + u_i^2, \qquad a_{ij} = u_i u_j \quad (i \neq j)$$

で与えられるとき，行列 A は正定値な実対称行列であることを示せ．ただし，$(u_1, u_2, \cdots, u_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$ とする．

(4) $n \geq 3$ とする．ある $\boldsymbol{b}$ と (3) で与えられる行列 A に対して共役勾配法を適用したところ，$\boldsymbol{x}_0$ のとり方に応じた回数の反復の後に厳密解が得られ，アルゴリズムが終了した．この反復回数の最大値はいくつか．ただし，計算誤差はないものとする．

4

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　図 1 の単一フィードバック制御系を考える．ただし，$P(s)$ は制御対象の伝達関数

$$P(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s}$$

であり，$k \in \mathbb{R}$ とする．

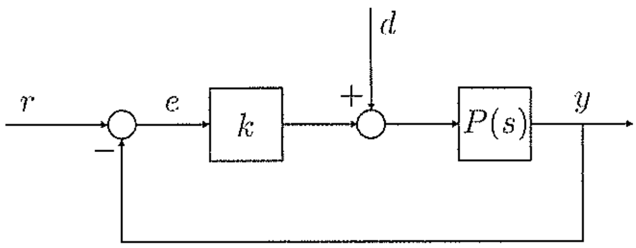

図 1

以下の問に答えよ．

(1)　制御対象 $P(s)$ のボードゲイン線図の概形を描け．

(2)　図 1 のフィードバック系が安定となる k の範囲を求めよ．

(3)　k が (2) で求めた範囲にあるとし，$r(t)$ を単位ステップ信号とする．$d(t) = 0\ (t \geq 0)$ のときおよび $d(t)$ が単位ステップ信号のときの定常偏差 $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty}(r(t) - y(t))$ をそれぞれ求めよ．

問 2　次の線形システムを考える．

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \qquad (*)$$

ただし，n を自然数として $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ である．

以下の問に答えよ．

(1)　$u(t) = 0\ (t \geq 0)$ とする．任意の初期値 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して線形システム $(*)$ の解 $x(t)$ が 0 に漸近するための必要十分条件は，行列 A の固有値の実部がすべて負であることを証明せよ．

(2)　行列 A と初期値 x_0 をそれぞれ

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とし，$u(t) = 0\ (t \geq 0)$ とする．このとき，線形システム $(*)$ の解 $x(t)$ に対して

$$\int_0^\infty x(t)^\top x(t)\mathrm{d}t$$

の値を求めよ．

(3)　線形システム $(*)$ が可制御であれば，任意の $\tau > 0$ に対して，行列

$$\int_0^\tau \mathrm{e}^{-A\theta}BB^\top \mathrm{e}^{-A^\top\theta}\mathrm{d}\theta$$

は正則となることを示せ．

5

ボルツマン定数を k，プランク定数を h として，以下の全ての問に答えよ．

最初に，質量 m の単原子分子 N 個からなる理想気体が，体積 V の容器中において絶対温度 T，圧力 P の熱平衡状態にある系を考える．ただし，N は十分大きいものとする．

(1) この系のヘルムホルツの自由エネルギー $F_0(m, N, T, V)$ を求めよ．

(2) この系のギブスの自由エネルギー $G_0(m, N, T, P)$ を求めよ．

次に，AとBの２種類の単原子分子からなる理想気体が，体積 V の容器中において絶対温度 T，圧力 P の熱平衡状態にある系を考える．分子Aの質量を m_0，粒子数を N_0 とし，分子Bの質量を m_1，粒子数を N_1 とする．ただし，$N_0 \gg N_1 \gg 1$ が成り立っているものとする．

(3) この系のギブスの自由エネルギー $G(m_0, m_1, N_0, N_1, T, P)$ を求めよ．また，

$$\Delta G = G(m_0, m_1, N_0, N_1, T, P) - G_0(m_0, N_0, T, P) - G_0(m_1, N_1, T, P)$$

を N_0，N_1，k，T を用いて表せ．ここで，G_0 は (2) で求めた関数である．

(4) この系の分子Aに関する化学ポテンシャル $\mu = \left(\dfrac{\partial G}{\partial N_0}\right)_{T,P}$ を求めよ．

最後に，AとBの２種類の単原子分子からなる理想気体が体積 $2V$ の容器中にあり，この容器中を分子Aだけが通過可能な半透膜で仕切ったときの，半透膜の両側にある２つの系の絶対温度 T の熱平衡状態を考える．仕切られた２つの系の体積はいずれも V であり，それぞれの系に含まれる分子Bの粒子数は N_L，N_R であるとする．また，２つの系の分子Aの合計粒子数は $2N_S$ であり，N_L と N_R は N_S に比べて十分小さく，かつ１に比べて十分大きいものとする．

(5) ２つの系の圧力の差 ΔP を N_L，N_R，V，k および T を用いて表せ．ただし，ΔP は２つの系のいずれの圧力よりも十分に小さいと仮定する．

6

次の各問のそれぞれに答えよ．

問１

３次元デカルト座標系 O-$x_1x_2x_3$ における流体の速度の x_1, x_2, x_3 方向成分をそれぞれ u_1, u_2, u_3 としたとき，点 (x_1, x_2, x_3) における速度が

$$\begin{cases} u_1 = \alpha x_2, \\ u_2 = -\alpha x_1, \\ u_3 = \beta(x_1^2 + x_2^2), \end{cases}$$

と表されているとする．ただし，α は正の定数であり，β は定数である．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 点 (x_1, x_2, x_3) における流体粒子（流体の微小部分）の加速度ベクトルを求めよ．

(2) $\beta = 0$ のときの (x_1, x_2) 平面での流線を表す式と流線の概略図を示せ．また，流体粒子が流線上を動いていく方向も示せ．

(3) 時刻 $t = 0$ において点 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ にあった流体粒子が，時刻 $t = T$ において点 $(x_1, x_2, x_3) = (a, b, 3)$ へと動いたとする．このとき，T, a, b の値を α, β を用いて表せ．

問２

図のように，水平面に対して角度 θ の傾きをもつ２枚の平行平板の間を層状に流れる２つの非圧縮性粘性流体を考える．上層と下層の流体の粘性係数はそれぞれ $\mu, 2\mu$ であるとする．また，上層と下層の流体の密度はそれぞれ $\rho, 2\rho$ であり，上層と下層の流体の厚さはいずれも h であるとする．図のように，平板に沿って下向きに x 軸，平板に垂直な斜め上方向に y 軸をとり，２つの流体の界面を $y = 0$ とする．また，下の平板は静止しており，上の平板は速さ U で x 軸正方向に動いているとする．そして，２つの流体の運動は x 軸方向に流れる２次元定常流であるとし，流体の圧力は x 軸方向には変化しないものとする．また重力加速度の大きさを g とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 界面 $y = 0$ における流体の速さを求めよ．

(2) 上の平板での流体の圧力を p_0 としたとき，下の平板での流体の圧力を求めよ．

(3) 上の平板において流体が平板に及ぼす接線応力が 0 となるときの U を，ρ, g, h, μ, θ を用いて表せ．