平成26年度4月期，平成25年度10月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程
複雑系科学専攻

入学者選抜試験問題

【専門科目】

平成25年7月14日 13:00 – 14:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 専門科目は全部で6題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から1題選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の若い順に1題のみ採点を行う。

(5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙 (計算用紙) が配布される。開始後、解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答すること。解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1　次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　$C_0^1([0,1]) := \{f|f$ は閉区間 $[0,1]$ 上の 1 回連続的微分可能な関数で，$f(0) = f(1) = 0\}$ とする．また，$[0,1]$ 上の連続関数 u に対して，$N(u)$ を

$$N(u) := \int_0^1 |u(x)|^2\,dx$$

と定める．このとき，$f \in C_0^1([0,1])$ に対して $N(f) \leq N(f')$ が成立することを示せ．ただし f' は f の導関数を表す．

問 2　T を正数とする．実数体 $\mathbb{R}$ 上の線型空間

$$X = \{f \mid f \text{ は閉区間 } [0,T] \text{ 上の連続関数で } f(0) = 0\}$$

に最大値ノルム，すなわち

$$\|f\| := \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| \qquad (f \in X)$$

を導入すると，X は Banach 空間である．ここで X 上の線型作用素 Φ を

$$\Phi(f)(t) := \int_0^t f(s)\,ds \qquad (0 \leq t \leq T),\ f \in X$$

とする．このとき以下の設問に答えよ．

(1) Φ は X 上の有界線型作用素であることを示し，その作用素ノルムを求めよ．

(2) Φ は X 上のコンパクト作用素であるか．理由を付して答えよ．

(3) $T < 1$ とする．$g \in X$ に対して積分方程式

$$f(t) + \int_0^t f(s)\,ds = g(t) \qquad (0 \leq t \leq T)$$

を満たす $f \in X$ が唯一つ存在することを証明せよ．

2　次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad y(1) = 1$$

の解を求めよ．

問 2　$a > b > 0$ とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta}$ の値を求めよ．

問 3　$f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ 上の非負値の (実数値) 連続関数で，不等式

$$f(x) \leq \int_0^x (1+y)f(y)\,dy \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

を満たしている．このとき $f(x)$ を求めよ．

3

次の各問のそれぞれに答えよ.

問 1. 次の常微分方程式と初期条件

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)+u(t)=2\cos t \quad (t>0), \qquad u(0)=2$$

を満たす関数 $u(t)$ を求めよ.

問 2. 次の積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$$

問 3. 行列 A が次のように与えられている.

$$A=\begin{pmatrix}1/2 & 3/8\\ 3/8 & -1/2\end{pmatrix}$$

このとき，次の各問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 次の常微分方程式の初期値問題の解を求めよ.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} \quad (t>0), \qquad \begin{pmatrix}x(0)\\ y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}$$

(3) (2) の初期値問題を前進 Euler 法を用いて離散化すると次の漸化式が得られることを示せ.

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=(I+hA)\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} \quad (n=0,1,\cdots) \qquad (*)$$

また $(*)$ の厳密解を求めよ．但し，$h>0$ は t の増分，$(x_n,y_n)^T$ は $t=nh\,(n=0,1,\cdots)$ における差分解，I は単位行列であり，$(x_0,y_0)^T=(1,-3)^T$ とする.

(4) 計算機を利用して，IEEE754 に規定される単精度浮動小数点演算を用いて漸化式 $(*)$ の解を数値計算した．計算手順は以下のとおりである．まず式 $(*)$ において $n=0$ とし，式 $(*)$ の右辺を計算することにより $(x_1,y_1)^T$ を求める．以下，順次 $n=1,2,\cdots$ として同様な手順により $(x_n,y_n)^T$ $(n=2,3,\cdots)$ を求める．このとき，$h=1/11$ を用いて得られた数値結果は n が小さいうちは漸化式の厳密解とよく一致したが，$t=25$ $(n=275)$ では漸化式の厳密解とは大きく異なるものとなったという．その理由を述べよ．なお，オーバーフロー，アンダーフローは起こらなかった.

4

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1 図 1 の単一フィードバック制御系を考える．ただし，$P(s)$ は制御対象の伝達関数

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1},$$

$K(s)$ は補償器の伝達関数

$$K(s) = k_1 + \frac{k_2}{s}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

である．

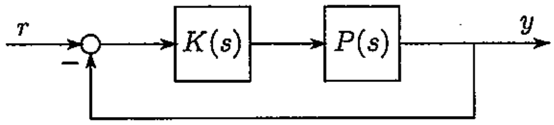


図 1

以下の問に答えよ．

(1) 制御対象 $P(s)$ の単位ステップ応答の概形を描け．

(2) 図 1 のフィードバック系が安定となる k_1 と k_2 の範囲を求め，k_1-k_2 平面上にその範囲を図示せよ．

(3) k_1 と k_2 は (2) で求めた範囲にあるとする．このとき，$r(t)$ を単位ステップ信号としたときの出力 $y(t)$ の定常値を求めよ．

問 2 次の線形システム

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad (*)$$

に対する状態フィードバック制御

$$u(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \qquad (**)$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 線形システム $(*)$ は可制御であることを示せ．

(2) 線形システム $(*)$ に対して，閉ループ系の極を $\{-1, -2\}$ に配置する $(**)$ の状態フィードバックゲイン $[k_1, k_2]$ を求めよ．

(3) 線形システム $(*)$ に対して，次の評価関数

$$J = \int_0^\infty \left(x_1(t)^2 + 4u(t)^2\right) dt$$

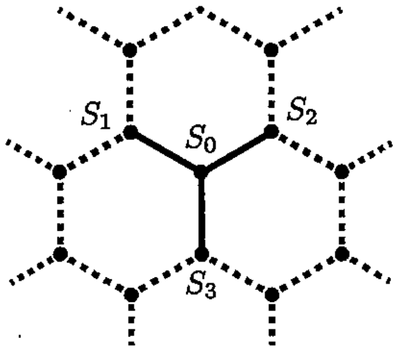
を最小にする $(**)$ の状態フィードバックゲイン $[k_1, k_2]$ を求めよ．

5

蜂の巣格子上の強磁性イジングスピン系を考える．各格子点上にあるスピンは，その最近接格子点上のスピンとのみ相互作用する．下図に示すように，この蜂の巣格子点上の4個のスピン $S_i (i = 0, 1, 2, 3)$ に着目しよう．各スピンの状態 S_i は $+1$ あるいは -1 をとり，これら4個のスピン系のハミルトニアン H は

$$H = -JS_0 \sum_{i=1}^{3} S_i - h \sum_{i=1}^{3} S_i$$

で与えられていると仮定する．ここで，J はスピン間相互作用の強さを表す正の定数，h は着目した4個のスピンの周囲に存在するスピンからの $S_i (i = 1, 2, 3)$ への影響を近似的に表現するために導入した平均場である．系は絶対温度 T の熱平衡状態にあるものとし，ボルツマン定数を k，$\beta = \dfrac{1}{kT}$ として，以下の問に答えよ．



(1) 平均場 h が与えられたものとして，分配関数を求めよ．

(2) 平均場 h が与えられたものとして，スピン S_0 の熱平衡状態における平均値 $\langle S_0 \rangle$ を求めよ．

(3) 平均場 h が与えられたものとして，スピン $S_i (i = 1, 2, 3)$ の熱平衡状態における平均値 $\langle S_i \rangle$ を求めよ．

(4) 熱平衡状態では各スピンの平均値はお互いに等しいという条件から，平均場 h を決定する次の方程式

$$\frac{\cosh[\beta(h + J)]}{\cosh[\beta(h - J)]} = e^{\beta h}$$

を導け．

(5) 温度 T が十分低温になると，常磁性相から強磁性相へ相転移を起こすことを説明し，臨界温度 T_c を求めよ．

6

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1

デカルト座標系 O-$x_1x_2x_3$ での応力テンソルの (i,j) 成分 σ_{ij} と歪みテンソルの (i,j) 成分 κ_{ij} が，正の定数 λ, μ を用いて

$$\sigma_{ij} = \lambda\left(\sum_{\ell=1}^{3}\kappa_{\ell\ell}\right)\delta_{ij} + 2\mu\kappa_{ij}, \quad (i,j = 1,2,3)$$

で関係づけられている等方的フック弾性体を考える．ここで，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．

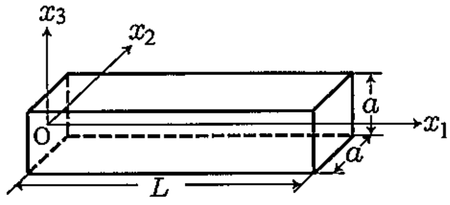


図 1

この弾性体からなる，長さが L で，1 辺の長さが a の正方形断面をもつ棒を考える．そして，図 1 のように，棒の長さ方向に x_1 軸をとり，棒の断面方向には正方形断面の各辺に平行になるように x_2 軸，x_3 軸をとる．また，棒の一端が $x_1 = 0$ となり，棒の側面が $x_2 = \pm a/2$, $x_3 = \pm a/2$ となるように原点 O を選ぶ．この棒の一端を，$x_1 = 0$ の面上にあるように固定し，他端 $x_1 = L$ の面を x_1 軸正方向に大きさ F の力で一様に引っ張ったときに，棒の長さが微小な量 ΔL だけ伸びたとする．重力の影響は無視でき，この弾性体の歪みは微小であり，応力テンソル，歪みテンソルの値はこの弾性体中で一様であるとして，以下の問に答えよ．

(1) 以下のように表したときの定数 E を λ と μ を用いて示す式を求めよ．

$$\frac{F}{a^2} = E\frac{\Delta L}{L}$$

(2) この棒の，引っ張る前の断面積を $S = a^2$，引っ張ったときの断面積を $S + \Delta S$ としたとき，棒の断面積の変化率 $\Delta S/S$ を λ, μ, F, S を用いて表す式を求めよ．

(3) 棒の内部に，x_1 軸正方向および x_3 軸正方向と $\pi/4$ の角度をなし，かつ x_2 軸と直交する法線ベクトルをもつ平面を考える．棒を引っ張ったときの，この平面を通しての法線応力と接線応力の大きさを F と a を用いて表す式を求めよ．

問 2

z 軸を鉛直上向きにとったデカルト座標系 O-xyz において，$z = h$ と $z = -h$ で表される 2 枚の水平な平板の間に，密度 ρ，粘性係数 μ の非圧縮性粘性流体があるとする．$z = h$ の平板は静止しており，$z = -h$ の平板は y 軸正方向に一定の速さ V で動いているとする．また，流体中の圧力 p は，y には依存せず，$\dfrac{\partial p}{\partial x} = -c$ を満たすものとする．ここで，c は正定数である．そして，流体の流れは定常流で平板に沿っており，流体速度の (x,y) 方向の成分 (u,v) は x, y に依存しないとする．このとき，重力加速度の大きさを g として，以下の問に答えよ．

(1) u と v を座標 z の関数として求めよ．

(2) 流体が $z = -h$ の平板に及ぼす接線応力の大きさを求めよ．

(3) $z = h$ の平板上の点 $(x,y,z) = (0,0,h)$ での流体の圧力を p_0 とするとき，$z = -h$ の平板上の点 $(x,y,z) = (h,h,-h)$ での流体の圧力を求めよ．

(4) $z = 0$ での速度場の流線が x 軸正方向と $\pi/4$ の角度をなすときの c の値を μ, V, h を用いて表せ．