平成25年度4月期，平成24年度10月期入学

# 京都大学大学院情報学研究科修士課程
# 複雑系科学専攻

# 入学者選抜試験問題

# 【専門科目】

平成24年7月22日 13:00 – 14:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 専門科目は全部で6題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から1題選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の若い順に1題のみ採点を行う。

(5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答すること。解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

**1** 次の各問のそれぞれに答えよ.

問 1 (1) $f(x)$ を閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数とするとき,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k}{n}-\frac{1}{3n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx\right)=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\,dx \qquad (*)$$

が成立することを証明せよ.

(2) $f(x)$ を区間 $[0,1]$ 上の実数値ルベーグ可積分関数とするとき, 等式 $(*)$ が成立することを証明せよ.

問 2 実数列 $x=(x_1,x_2,\dots)$ で $\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|$ が有界となるものの全体が作る $\mathbb{R}$ 上の線型空間を $\ell^1$ とし, $x=(x_1,x_2,\dots)\in\ell^1$ に対して

$$\|x\|:=\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|$$

によってノルムを定めて, $\ell^1$ をノルム線型空間とする. 実数 $a_{ij}$ $(i\geq 1, j\geq 1)$ が

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|=\frac{1}{2^{j-1}} \quad (j=1,2,3,\dots)$$

を満たすとき, $x=(x_1,x_2,\dots)\in\ell^1$ に対して写像 $A$ を

$$Ax=\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{1j}x_j,\ \sum_{j=1}^{\infty}a_{2j}x_j,\ \dots\right)$$

によって定める.

(1) 写像 $A$ は $\ell^1$ 上の有界線型作用素を定めることを証明せよ.

(2) 有界線型作用素 $A$ の作用素ノルムの値を求めよ.

2　次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　定積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ の値を求めよ．

問 2　$\Gamma$ を $\mathbb{R}^2$ の滑らかな単純閉曲線とし，$\Gamma$ で囲まれた単連結領域を $\Omega$ とする．$\Gamma$ 上の外向き法線方向微分を $\frac{\partial}{\partial n}$ と表すとき，$\Omega \cup \Gamma$ の調和関数 $u$ で，$\Gamma$ 上で $\frac{\partial u}{\partial n} = 1$ を常に満たすものは存在しないことを証明せよ．

問 3　(1) $f(x) = x(1-x)$ を閉区間 $[0,1]$ 上で一様収束する Fourier 級数に展開せよ．

(2) 熱方程式の初期値境界値問題

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x), && 0 < x < 1,\ t > 0, \\
u(0,x) &= x(1-x), && 0 < x < 1, \\
u(t,0) &= u(t,1) = 0, && t \geq 0
\end{aligned}
$$

を満たす関数 $u(t,x)$ を求めよ．

## 3

次の各問のそれぞれに答えよ.

**問 1**　定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ の値を求めよ.

**問 2**　$C$ を複素平面内の単純閉曲線で, 反時計回りに向きづけられているものとする. この単純閉曲線 $C$ で囲まれた領域の内部が原点 $z=0$ を含むものとし, $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^4}e^z\mathrm{d}z$ の値を求めよ.

**問 3**　フーリエ変換を利用して, 次の式 (1)–(3) を満たす関数 $u(x,t)$ を求めることを考える.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 2\epsilon c\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(x,t) - (1-\epsilon^2)c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad x\in\mathbb{R},\ t>0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \qquad x\in\mathbb{R} \tag{3}$$

ただし, $\epsilon$, $c$ は正の定数である. $f(x)$, $g(x)$ は滑らかな絶対可積分関数であるとし, また, 絶対可積分関数 $\phi(x)$ のフーリエ変換を

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x$$

とするとき, 以下の問に答えよ.

(a) 滑らかであって, 導関数まで含めて $x$ について絶対可積分な関数 $u(x,t)$ が (1)–(3) を満たすとき, (1)–(3) の両辺を $x$ についてフーリエ変換すると, それぞれ

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\xi,t) + \boxed{\text{(A)}}\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t) + \boxed{\text{(B)}}\hat{u}(\xi,t) = 0, \qquad \xi\in\mathbb{R},\quad t>0 \tag{4}$$

$$\hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi), \qquad \xi\in\mathbb{R} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,0) = \hat{g}(\xi), \qquad \xi\in\mathbb{R} \tag{6}$$

となる. $\boxed{\text{(A)}}$, $\boxed{\text{(B)}}$ に当てはまる数式を答えよ. ただし, $\hat{u}(\xi,t)$ は $u(x,t)$ の $x$ に関するフーリエ変換を表すものとする.

(b) $g$ の原始関数 $G$ が絶対可積分のとき, 式 (4)–(6) を満たす $\hat{u}(\xi,t)$ を $\hat{f}$ および $\hat{G}$ を用いて表せ.

(c) 式 (1)–(3) を満たす関数 $u(x,t)$ を $f$ および $g$ の原始関数 $G$ を用いて表せ.

# 4

次の各問のそれぞれに答えよ.

**問 1**　図 1 の単一フィードバック系を考える．ただし，$P(s)$ は制御対象の伝達関数

$$P(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad 0 < T_1 < T_2,$$

$K(s)$ は補償器の伝達関数

$$K(s) = \frac{k}{s}, \quad k \in \mathbb{R}$$

である.

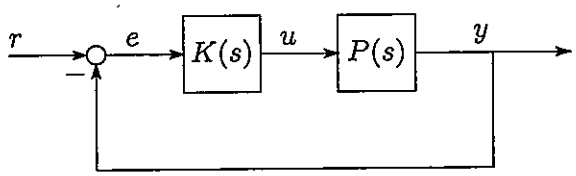



**図 1**

以下の問に答えよ.

**(1)** 制御対象 $P(s)$ の Bode ゲイン線図の概形を描け.

**(2)** 図 1 のフィードバック系が安定となる $k$ の範囲を求めよ.

**(3)** 図 1 のフィードバック系のゲイン余裕を求めよ.

**問 2**　次の 1 入力 1 出力システムについて，以下の問に答えよ．ただし，$x_1$，$x_2$，$u$ は実数値関数である.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad =: Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}(t) \quad =: Cx(t) \end{aligned} \qquad (*)$$

**(1)** $(*)$ のシステムの伝達関数 $G(s)$ を求めよ.

**(2)** $(*)$ は (1) で求めた伝達関数 $G(s)$ の最小実現であることを示せ.

**(3)** $1 \times 2$ 定数行列 $K$ に対して，状態フィードバック $u = -Kx$ を仮定したとき，次の評価関数

$$J = \int_0^\infty \left(u(t)^2 + 8y(t)^2\right) dt$$

を最小にする最適フィードバックゲイン $K$ を求めよ.

**(4)** 上で求めた $K$ に対して，$L(s) := K(sI - A)^{-1}B$ とおく．ただし，$I$ は単位行列である．このとき，

$$\lim_{\omega \to \infty} \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right| = 1$$

となることを示せ．また

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right| = 1$$

であることを示せ.

**5**　次の各問のそれぞれに答えよ．

問１

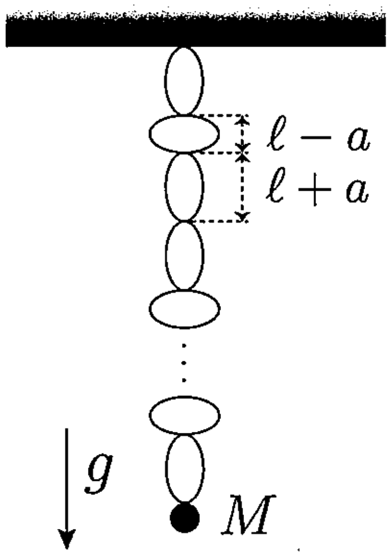
下図に示すように，上端が固定され下端に質量 $M$ のおもりが取り付けられたまっすぐなチェーンが，鉛直下向きにつるされている．チェーンは $N$ 個の楕円リングがつながることで構成されており，各楕円リングは長軸の長さが $\ell + a$，短軸の長さが $\ell - a$ である．チェーンは絶対温度 $T$ の熱平衡状態にあり，楕円リングは長軸か短軸のいずれかが鉛直方向を向くものと仮定する．また，楕円リングは変形せず，その質量は無視できるものとする．ボルツマン定数を $k$，重力加速度を $g$ として，以下の問に答えよ．

(1) 長軸が鉛直方向を向いている楕円リングの個数が $n$ である状態のエネルギー $E$ を求めよ．

(2) 分配関数 $Z$ を求めよ．

(3) 熱平衡状態における平均エネルギー $\langle E \rangle$ およびチェーンの平均長 $\langle L \rangle$ を求めよ．

(4) 質量 $M$ が十分小さいとき，温度 $T$ が十分高温のとき，温度 $T$ が十分低温のとき，の3つの場合それぞれについての $\langle L \rangle$ を求めよ．また，それぞれの結果の物理的意味を述べよ．




問２

微視的な状態 $\Gamma$ に対するエネルギーが $H_h(\Gamma) = E(\Gamma) - hx(\Gamma)$ で与えられる系を考える．ここで，$E(\Gamma)$ は内部エネルギー，$h$ は外場を表し，$x(\Gamma)$ は外場 $h$ に共役な巨視的状態変数を表す．系は絶対温度 $T$ の熱平衡状態にあり，外場 $h$ の大きさは十分小さいと仮定する．ボルツマン定数を $k$ として，以下の問に答えよ．

(1) 外場 $h$ のもとでの熱平衡状態における $x(\Gamma)$ の平均値を $\langle x \rangle_h$ と表す．このとき，外場のない $h = 0$ での熱平衡状態における $x(\Gamma)$ の平均値は $\langle x \rangle_0$，二乗平均値は $\langle x^2 \rangle_0$ と表される．$\langle x \rangle_0$ および $\langle x^2 \rangle_0$ を用いて $\langle x \rangle_h$ を表せ．

(2) 外場がないときの共役な巨視的状態変数の揺らぎ $\langle (x - \langle x \rangle_0)^2 \rangle_0$ を，外場 $h$ に対する系の応答から測定する方法について，(1) の結果を用いて説明せよ．

## 6

次の各問のそれぞれに答えよ．

### 問1

3次元デカルト座標系を O-$x_1x_2x_3$ とし，原点における連続体の応力テンソル $T$ が以下の形で表されているとする．

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ただし，$i, j = 1, 2, 3$ に対する $T$ の $(i, j)$ 成分は，平面 $x_j = 0$ を通して，$x_j > 0$ の側が $x_j < 0$ の側に及ぼす応力の $x_i$ 成分を表す．このとき，以下のすべての問に答えよ．

(1) 原点において，平面 $x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = 0$ を通して，$x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 > 0$ の側が反対側に及ぼす応力ベクトルの向きが $x_1$ 軸に平行になるときの $\alpha$ と $\beta$ の値を求めよ．また，このときの法線応力，接線応力の大きさを求めよ．

(2) 原点における，主応力および応力の主軸の方向を求めよ．

### 問2

3次元デカルト座標系 O-$xyz$ と $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ の関係を満たす円筒座標系 $(r, \varphi, z)$ を考える．密度 $\rho$，粘性係数 $\mu$ の非圧縮性粘性流体の速度の $r, \varphi, z$ 方向成分を，それぞれ $v_r, v_\varphi, v_z$ としたとき，

$$v_r = -ar, \quad v_\varphi = 0, \quad v_z = bz$$

であるとする．ここで，$a, b$ は定数である．このとき，以下のすべての問に答えよ．

(1) 質量保存則より，$a$ と $b$ の満たすべき関係式を求めよ．

(2) 原点での圧力と $r = R$, $z = c$ を満たす点での圧力の差を求めよ．ただし，$R > 0$ とする．

(3) 点 $(r, \varphi, z) = \left(1, \dfrac{\pi}{4}, 1\right)$ における流体粒子（流体の微小部分）の加速度の大きさを求めよ．

### 問3

密度 $\rho$，速度 $\boldsymbol{v}$ の圧縮性流体の運動における質量保存則を表す連続の方程式を導出せよ．