平成23年度

京都大学大学院情報学研究科修士課程
複雑系科学専攻

入学者選抜試験問題

【専門科目】

平成22年7月19日 13:00 - 14:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 専門科目は全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から1題選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の若い順に1題のみ採点を行う。

(5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答すること。解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　$f \in L^1(-\pi,\pi)$ に対して

$$a_n(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f(\theta)\, d\theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

とし，函数 f の Fourier 係数と呼ぶ．また $g \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して

$$h(\theta) := \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta - \varphi) f(\varphi)\, d\varphi, \quad -\pi < \theta < \pi \tag{$*$}$$

とおく．ただし g は周期 2π の周期函数として延長されているものとして，この積分を理解する．

(1) $(*)$ の右辺の積分は殆んど至る所の θ に対して有限値として定まることを示し，さらに $(*)$ で定められる函数 h は $h \in L^2(-\pi,\pi)$ であり，

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(\varphi)|^2\, d\varphi \le \int_{-\pi}^{\pi} |g(\varphi)|^2\, d\varphi \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\varphi)|\, d\varphi \right)^2$$

が成立することを示せ．

(2) 函数 g および h に対しても，Fourier 係数が定義されることを示し，$a_n(h) = \sqrt{2\pi}\, a_n(f) a_n(g)$ が成立することを示せ．

問 2　数列空間 X を

$$X = \left\{ x \,\middle|\, x = (x_1, x_2, \dots),\ x_n \in \mathbb{C}\ (n \in \mathbb{N}),\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$$

とし，$x \in X$ に対して

$$\|x\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

によって X にノルムを導入する．

(1) X はこのノルムによって複素 Banach 空間であることを示せ．

(2) $y = (y_1, y_2, \dots) \in X$ に対して X 上の線型作用素を

$$Tx = (y_1 x_1,\ y_2 x_2,\ \dots), \quad x \in X$$

と定めると，T は X 上の有界線型作用素であることを示せ．

(3) (2) で定められた T は X 上のコンパクト作用素であることを示せ．

(注) $\mathbb{N}$ は正の整数の全体集合を表す．

2

次の各問のそれぞれに答えよ.

問 1　Ω を $\mathbb{R}^3$ の有界領域とし，その境界 Γ は滑らかであるとする．$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ が Ω 上の調和函数であるとき

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n} u \, dS$$

の値を求めよ．但し $\partial/\partial n$ は Γ 上の外向き法線方向微分とし，dS は Γ 上の面素を表すものとする．

問 2　Fourier 変換 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2}\, dx$ を計算せよ．

問 3　常微分方程式の境界値問題

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + q(x)u(x) = f(x)\ , \quad x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{aligned}$$

に対する有限要素法を考える．ただし $p(x)$，$q(x)$，$f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ 上の滑らかな函数で，$[0,1]$ 上で $p(x) > 0$，$q(x) > 0$ を満たすものとする．このとき，この境界値問題が唯 1 つの滑らかな解を持つことは既知として，以下の問に答えよ．

(1) この境界値問題に対する弱形式を求めよ．

(2) 区分線型要素を用いて (1) で与えた弱形式を離散化し，この境界値問題に対する有限要素法のスキームを与えよ．

(3) (2) の離散化によって得られる連立一次方程式の係数行列が正則であることを示せ．

(4) (2) で与えた有限要素法のスキームに対する解の収束性について説明せよ．

3

下図 (a) のフィードバック制御系を考える．ただし P は制御対象の伝達関数

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1},$$

K は補償器の伝達関数

$$K(s) = k_1 + \frac{k_2}{s}$$

であり，$\zeta > 0$, k_1, k_2 はパラメータである．以下の各問にそれぞれ答えよ．ただし $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ とする．

(1) P の状態空間実現を 1 つ求めよ．

(2) $\zeta = \zeta_0 > 0$ に対して P の周波数応答のゲイン $|P(\mathrm{j}\omega)|$ は，ある $\omega = \omega_0 > 0$ においてピーク値 $\sqrt{2}$ を取っている．このとき ζ_0 と ω_0 を求め，P の Bode 線図を描け．

(3) $\zeta = 0.5$ とする．このフィードバック制御系が安定となるために k_1, k_2 が満たすべき必要十分条件を求めよ．

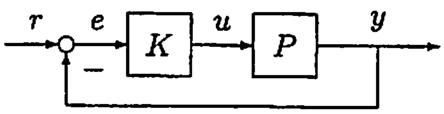
(4) $\zeta = 0.5$ であり，k_1, k_2 は (3) の必要十分条件を満たすものとする．このとき r を入力，e を出力とする系の伝達関数を求め，r がステップ入力であるときの e の定常値を求めよ．

(5) $\zeta = 0.5$, $k_2 > 0$ とする．r を入力，e を出力とする系の状態空間実現を 1 つ求めよ．

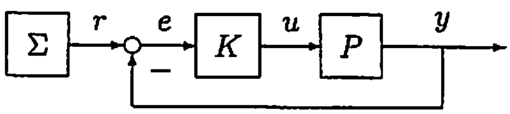
(6) $\zeta = 0.5$, $k_2 > 0$ とする．下図 (b) に示すようにフィードバック制御系に自律系

$$\Sigma : \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z(t) &= 0 \\ r(t) &= z(t) \end{cases}$$

を結合する．結合によってできる，e を出力とする自律系の可観測な状態空間実現を 1 つ求めよ．



(a)



(b)

4　次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1

2つのエネルギーの値0または$\epsilon(>0)$を取る粒子がN個集まった系を考える．粒子間の相互作用は無く，系は熱平衡状態にあると仮定する．ボルツマン定数をk，絶対温度をT，$\beta=\dfrac{1}{kT}$として，以下の問に答えよ．

(1) この系の分配関数Zを求めよ．

(2) 内部エネルギーUと分配関数Zの間に次の関係式

$$U=-\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z$$

が成り立つことを示し，これを利用してこの系のUを求めよ．

(3) この系のヘルムホルツの自由エネルギーF，およびエントロピーSを求めよ．

問 2

格子点あたり微小体積vをもつ格子点がμ個あり，i番目の格子点の取り得る状態n_iは，分子が1つ存在するか$(n_i=1)$，存在しないか$(n_i=0)$のいずれかであるような格子気体モデルを考える．分子の総数νは一定と仮定し，ボルツマン定数をk，絶対温度をTとし，μとνは$1\ll\nu\ll\mu$を満たすものとする．このとき以下の問に答えよ．

(1) エントロピーSを求めよ．

(2) 系のエネルギーは粒子間の引力を反映して

$$-\epsilon\sum_{\mathrm{NN}}n_in_j$$

で与えられるとする．ただし，$\sum_{\mathrm{NN}}$は全ての最近接格子点対に関する和を意味し，ϵは正の定数である．1つの格子点あたりの最近接格子点がz個あるとし，各格子点の分子の存在確率を平均値$\langle n_i\rangle=\dfrac{\nu}{\mu}$で近似したときのエネルギー$E$を求めよ．

(3) 熱平衡状態では，圧力P，体積V，ヘルムホルツの自由エネルギーFは次の関係式

$$P=-\frac{\partial F}{\partial V}$$

を満たすことが知られている．この格子気体モデルの体積Vは$V=\mu v$であることに着目し，このモデルの状態方程式を求めよ．ただし，$V_0=\nu v$とし，状態方程式はμとνの代わりにそれぞれVとV_0を用いて表せ．

5

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1

無限に広がった連続体中にデカルト座標系 O-$x_1x_2x_3$ を導入する．そして，この連続体中の点 (x_1,x_2,x_3) における応力テンソル T が

$$T = \begin{pmatrix} 3+x_1 & -1-x_2 & x_1 \\ -1-x_2 & 3+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & \alpha \end{pmatrix}$$

と表されるとする．ここで，$i,j=1,2,3$ に対する T の (i,j) 成分は，$x_j=0$ の面を通して，$x_j>0$ の側が反対側に及ぼす応力の x_i 成分を表し，α は実定数である．このとき，以下のすべての問に答えよ．

(1) $\alpha=1$ として，原点において，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ をもつ面を通して，$\boldsymbol{n}$ の向いた側が反対側に及ぼす応力ベクトルを考える．この応力ベクトルの x_1 成分，x_2 成分，x_3 成分が同じ値をとるような $\boldsymbol{n}$ を求めよ．

(2) $\alpha=0$ として，原点において，$x_3=0$ の面と直交し，単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n}$ の面を考え，この面を通しての応力ベクトルを考える．このとき，法線応力の大きさが最大となるような $\boldsymbol{n}$ と，そのときの法線応力の大きさ，接線応力の大きさを求めよ．また，接線応力の大きさが最大となるような $\boldsymbol{n}$ と，そのときの法線応力の大きさ，接線応力の大きさを求めよ．

(3) 原点を中心として，$x_1=\pm\frac{\varepsilon}{2}$，$x_2=\pm\frac{\varepsilon}{2}$，$x_3=\pm\frac{\varepsilon}{2}$ の 6 つの面で囲まれた立方体を考える．ここで，ε は正の定数である．これらの面を通してこの立方体に及ぼされる応力による力の合力を，立方体の体積 $V=\varepsilon^3$ を用いて表せ．

問 2

図のように，水平面に対して角度 β の傾きをもつ斜面上を流れる厚さ h の非圧縮性粘性流体（密度 ρ，粘性係数 μ）の層を考える．ただし，β は $\frac{\pi}{2}$ より小さいとする．図のように，斜面に沿って上向きに x 軸，斜面に垂直に z 軸をとり，斜面を $z=0$ とする．また，斜面は速さ U で x 軸正方向に動いているものとする．x 軸に沿った方向に流れる 2 次元定常流を考え，自由表面 $(z=h)$ では，圧力は一定値 p_0 をとり，接線応力は 0 であるとする．また重力加速度の大きさを g とする．このとき，以下のすべての問に答えよ．

(1) 流体の運動方程式と連続の式から，流体の x 方向の速度成分 u と圧力 p の満たすべき方程式を導け．

(2) 流体の圧力分布を求めよ．

(3) 流体の速度分布を求めよ．

(4) 斜面上での接線応力および法線応力の大きさを求めよ．

(5) 斜面上での流体速度と自由表面での流体速度が，大きさが等しく，かつ向きが反対となるような U を，g,h,ρ,μ,β を用いて表せ．