

平成30年度4月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程  
先端数理科学専攻

入学者選抜試験問題

【基礎科目】

平成29年7月15日 10:00 - 11:30

- (1) 指示があるまで問題を見てはならない。
- (2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。
- (3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。
- (4) 基礎科目は全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から3題選択して解答すること。4題以上選択した場合は、問題番号の若い順に3題のみ採点を行う。
- (5) 各受験者に対し、解答用紙3枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙の全てに受験番号と氏名を記入すること。
- (6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答用紙1枚につき1題を解答すること。  
解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。
- (7) 解答用紙3枚全てを提出すること。2題以下しか選択していない場合でも、選択予定の問題番号を記入し、必ず3枚の解答用紙を提出すること。
- (8) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 自然数  $k$  に対して  $E_k$  は  $k$  行  $k$  列の単位行列を表わすものとする。以下の問いに答えよ。

(1)  $a, b, c, d$  は整数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

で  $A^2 = 5E_2$  を満たすものをひとつ与えよ。

(2) 実行列

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

は  $B^2 = 5E_3$  を満たしているとする。このとき  $B$  の行列式のとり得る値を全て求めよ。さらに  $B$  の成分のうち少なくともひとつは無理数であることを示せ。

2  $n$  を自然数とし、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を  $n$  行  $n$  列の実行列で以下のふたつの条件 (i) および (ii) を満たすものとする:

(i) 任意の  $1 \leq i, j \leq n$  に対して  $a_{ij} \geq 0$ .

(ii) 任意の  $1 \leq i \leq n$  に対して  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ .

このとき以下の問いに答えよ。

(1) 行列  $A$  は 1 を固有値として持つことを示せ。

(2)  $\lambda$  を  $A$  の固有値とするとき、 $|\lambda| \leq 1$  を示せ。

3 次の積分値を求めよ. ただし  $0 < a < 1$  とする.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta.$$

4  $xyz$ -空間において

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 16, x^2 + z^2 \leq 25\}$$

とする.

(1)  $-4 \leq k \leq 4$  とする. 平面  $x = k$  と  $V$  の共通部分の面積を求めよ.

(2)  $V$  の体積は 500 以下であることを示せ.

## 5

長さ  $L$ , 質量  $M$ , 時間  $T$  を基本的な量として選び, 任意の物理量  $P$  の次元  $[P]$  を  $[P] = L^\alpha M^\beta T^\gamma$  のように表す. さて, 静止している流体の中を物体が動くとき, 流体と物体の間に働く抵抗力の大きさ  $F$  が物体の大きさ (長さ)  $r$ , 物体の速さ  $v$ , 流体の粘性率  $\eta$ , 流体の密度  $\rho$  のみに依存し,  $F = kr^a v^b \eta^c \rho^d$  のように与えられると仮定する.  $k$  は無次元の定数である. 粘性率の次元は  $[\eta] = L^{-1} M^1 T^{-1}$  で与えられることを利用してよい. このとき, 以下の各問に答えよ.

- (1) 力の次元  $[F] = L^\alpha M^\beta T^\gamma$  に対応する  $\alpha, \beta, \gamma$  の値を求めよ.
- (2)  $a, b, c$  をそれぞれ  $d$  を用いて表せ.
- (3)  $v$  が小さいとき, 流体の密度は抵抗力に影響しないと仮定する. このときの  $b$  の値を求めよ.
- (4)  $v$  が大きいとき, 流体の粘性率は抵抗力に影響しないと仮定する. このときの  $b$  の値を求めよ.

以下では, 簡単のため, 物体は質量  $m$  の質点とみなし, 静止している流体の中を一様な重力  $mg$  と抵抗力を受けて鉛直下方に落下するものとする. ここで,  $g$  は重力加速度の大きさを, 鉛直下向きに  $z$  軸をとり, 時刻  $t = 0$  で, 質点の位置は  $z = 0$ , 速度は  $\dot{z} = v_0$  である. また,  $v_0$  は  $v_0 \geq 0$  を満たし, ドットは時間微分を表す. また,  $\dot{z} = v_T$  で  $\ddot{z} = 0$  となるとする. 流体の密度と粘性率は一定であり, 抵抗力の大きさ  $F$  を, 正定数  $A$  と  $b$  を用いて,  $F = \frac{mg}{A^2} \dot{z}^b$  で与える. このとき, 以下の各問に答えよ.

- (5)  $b > 1$  の場合に, 横軸を  $\dot{z}$ , 縦軸を  $\ddot{z}$  にとり,  $\ddot{z}$  と  $\dot{z}$  の関係を図示し,  $v_T$  の物理的意味をその図を用いて説明せよ.
- (6)  $b = 1$  の場合に,  $\dot{z}$  を時刻  $t$ ,  $v_T, g$  を用いて表せ. ただし,  $v_0 = 0$  とせよ.