平成29年度4月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程
複雑系科学専攻

入学者選抜試験問題

【基礎科目】

平成28年7月16日 10:00 11:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 基礎科目は全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から3題選択して解答すること。4題以上選択した場合は、問題番号の若い順に3題のみ採点を行う。

(5) 各受験者に対し、解答用紙3枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙の全てに受験番号と氏名を記入すること

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答用紙1枚につき1題を解答すること
解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 解答用紙3枚全てを提出すること。2題以下しか選択していない場合でも、選択予定の問題番号を記入し、必ず3枚の解答用紙を提出すること。

(8) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 λ を実数として，3 行 3 列の行列 X を

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．自然数 n と実数 t に対して $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(tX)^k}{k!}$ の i 行 j 列成分を $\alpha_{ij}(t,n)$ とおくとき，任意の $i, j \in \{1,2,3\}$ に対して $\alpha_{ij}(t,n)$ は $n \to \infty$ で収束することを示せ．さらにその極限を $\alpha_{ij}(t)$ とおくとき

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) \end{pmatrix}$$

を求めよ．ただし 3 行 3 列の行列 A に対して A^0 は単位行列であるとする．

2 a を実数とし，

$$f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} a \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

とおく．(f_1, f_2, f_3, f_4) が $\mathbb{R}^4$ で 1 次独立とならないような a の値を全て求めよ．

3 $x \geq 0$ において，次の $f(x)$, $g(x)$ を考える．

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$0 < \alpha < 1$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} g(x)$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{\epsilon \to +0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{g(x)}{(1-x)^\alpha}\, dx$ が存在することを示せ．必要ならば次を用いてよい．
「実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，上に有界かつ単調増加ならば収束する．」

(3) (2) の極限値を $\displaystyle\int_0^1 \frac{g(x)}{(1-x)^\alpha}\, dx$ とおく．次の 2 数の大小関係を求めよ．

$$g(1), \qquad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{g(x)}{(1-x)^\alpha}\, dx.$$

ただし $\Gamma(s)$ は，$s > 0$ において次で与えられるガンマ関数である．

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{s-1}\, dt.$$

4 n を正の整数とする．次の各問に答えよ．

(1) i を虚数単位とする．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{2k-1}{2n}\pi i\right)$ の実部と虚部の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}}$ の値を求めよ．

5

鉛直上方に y 軸を取り，これと垂直に x 軸を取る．$(x,y) = (-X,Y)$，および，$(x,y) = (X,Y)$ $(X > 0,\ Y > 0)$ で固定した，太さの無視できる鎖を考える．鎖の長さは $2X$ よりも長く，図のように，鎖の形状は $x = 0$ で最下点に達する滑らかな曲線となる．最下点を原点とし，鎖の形状を表す関数を $y = f(x)$ とする．鎖の $(x,y) = (0,0)$ から $(x,y) = (t, f(t))$ (ただし，$0 < t \leq X$) までの部分の両端に働く張力を考える．$(x,y) = (0,0)$ では，x 軸の負の方向に張力が働く．この張力の大きさを H とおく．$(x,y) = (t, f(t))$ では，$y = f(x)$ の $x = t$ での接線の方向に大きさ T の張力が働く．この接線が x 軸となす角を θ，λ を鎖の質量の線密度，g を重力加速度の大きさ，s を $(x,y) = (0,0)$ から $(x,y) = (t, f(t))$ までの曲線の長さとし，定数 a を $a = \dfrac{g\lambda}{H}$ で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 鎖の $(x,y) = (0,0)$ から $(x,y) = (t, f(t))$ (ただし，$0 < t \leq X$) までの部分に働く力の x 方向のつり合いを $T,\ H,\ \theta$ を用いて表せ．また，y 方向のつり合いを $T,\ \theta,\ g,\ \lambda,\ s$ を用いて表せ．

(2) $a,\ s,\ \theta$ の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) $\dfrac{ds}{dt}$ を θ を用いて表せ．

(4) $0 < x \leq X$ の範囲において，$\exp(ax)$ と $\exp(-ax)$ を θ を用いて表せ．

(5) $-X \leq x \leq X$ の範囲において，$f(x)$ を定数 a と x を用いて表せ．