

平成26年度10月期・平成27年度4月期

京都大学大学院情報学研究科修士課程
複雑系科学専攻

入学者選抜試験問題

【基礎科目】

平成26年7月13日 10:00 - 11:30

- (1) 指示があるまで問題を見てはならない。
- (2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。
- (3) 解答時間は1時間30分である。途中退室は認めない。
- (4) 全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から3題選択して解答すること。4題以上選択した場合は、問題番号の若い順に3題のみ採点を行う。
- (5) 各受験者に対し、解答用紙3枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙の全てに受験番号と氏名を記入すること。
- (6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答用紙1枚につき1題を解答すること。
解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。
- (7) 解答用紙3枚全てを提出すること。2題以下しか選択していない場合でも、選択予定の問題番号を記入し、必ず3枚の解答用紙を提出すること。
- (8) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1

a を実数とし、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \{x | x \in \mathbb{R}^4, Ax = 0\}$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) A の rank (階数) が 2 となるような a の値を全て求めよ。
- (2) U は \mathbb{R}^4 の部分ベクトル空間であることを示せ。
- (3) U の次元を $d(a)$ とおく。 a が実数全体を動くときの $d(a)$ の最小値を求めよ。

2

n を自然数とし、 H を n 行 n 列のエルミート行列、 I を n 行 n 列の単位行列とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $H^2 = I$ なら H はユニタリ行列であることを示せ。
- (2) $H^3 = I$ なら $H = I$ であることを示せ。

3

自然数 n に対して、 $\psi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\psi_n(x) = \begin{cases} n^2 \left(\frac{1}{n} - |x| \right) & (|x| \leq \frac{1}{n} \text{ のとき}), \\ 0 & (|x| > \frac{1}{n} \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する。さらに $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は \mathbb{R} 上連続とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} |f(x) - f(0)| = 0$ を示せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_n(x) dx = f(0)$ を示せ。

4

次の問題にそれぞれ答えよ。

(1) α を正の実数とする。 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = 1$ が成立するような α の値を求めよ。

(2) 複素平面 \mathbb{C} 内の曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ を、 $\gamma(t) = \frac{t^2 \cos(2\pi t) + it}{\sqrt{2}}$ で与えるとき、次の積分の値を計算せよ。ただし i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ である。

$$\int_{\gamma} z^{2014} dz.$$

(3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束することを示せ。

5

質量 m の質点が、 xy 平面上を、原点を中心とする中心力を受けながら運動している。質点の位置 (x, y) を $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ で定まる動径変数 r と角度変数 ϕ で表す。中心力のポテンシャル $\tilde{U}(r)$ は正数 μ と正数 n を用いて、 $\tilde{U}(r) = -m\mu r^{-n}$ で与えられるとする。また、実数 h と実数 ε を用いて、質点の原点のまわりの角運動量を mh 、質点の全エネルギーを $m\varepsilon$ とおく。このとき、以下の各問に答えよ。

(1) 物理量の単位を MKS 単位系を用いて $m^a \text{kg}^b \text{s}^c$ のように表すとき、 h と ε の単位について、 a, b, c の値をそれぞれ記せ。

(2) 以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \mu r^{-n} = \varepsilon$$

ここで、ドット ($\dot{\cdot}$) は時間微分を表す。

(3) r の時間変化はポテンシャル

$$U(r) = \tilde{U}(r) + \frac{mh^2}{2r^2}$$

の下での 1 次元運動と等価であることを示せ。

(4) r の周期的な時間変化が適当な初期条件の下で可能であるために、 n が満たすべき条件を求めよ。