平成26年度4月期，平成25年度10月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程
複雑系科学専攻

入学者選抜試験問題

【基礎科目】

平成25年7月14日 10:00 – 11:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 基礎科目は全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から3題選択して解答すること。4題以上選択した場合は、問題番号の若い順に3題のみ採点を行う。

(5) 各受験者に対し、解答用紙3枚と下書用紙 (計算用紙) が配布される。開始後、解答用紙の全てに受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答用紙1枚につき1題を解答すること。
解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 解答用紙3枚全てを提出すること。 2題以下しか選択していない場合でも、選択予定の問題番号を記入し、必ず3枚の解答用紙を提出すること。

(8) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1

α, β は正の実数とし、$R > 0$ に対して $D_R = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R\}$ とおく。さらに $\exp(x) = e^x$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|r|^\alpha} \exp\left(-\frac{1}{r^2}\right) = 0$$

を示せ。

(2)

$$\lim_{R \to \infty} \int\int_{D_R} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right) dxdy$$

の値を求めよ。

(3)

$$\int\int_{D_R} \frac{1}{(x^2+y^2)^\beta} \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right) dxdy$$

は $\beta > 1$ ならば $R \to \infty$ で有限な極限を持つことを示せ。

2

k を実数とする。実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1-k \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7-k \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 6+k \end{pmatrix}$$

が 1 次独立にならないような k の値を全て求めよ。

3

n を自然数とし、正の実数 r に対して $C_r = \{re^{\sqrt{-1}\theta} | 0 \le \theta \le 2\pi\}$ とおく。$0 < r < 1$ のとき、

$$\int_{C_r} \frac{e^z \cos z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} dz$$

の値を求めよ。ただし、C_r は反時計回りに原点の周りを回るものとする。

4

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 6 & -1 & -12 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値を全て求めよ。さらに $P^{-1}AP$ が対角行列となるような３行３列の正則な実行列 P を一つ求めよ。

(2) ３つの実数列、$\{x_n\}_{n \ge 1}, \{y_n\}_{n \ge 1}, \{z_n\}_{n \ge 1}$ は

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

を全ての自然数 n でみたすとする。このとき、

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \middle| x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{R}, \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n}(|x_n| + |y_n| + |z_n|) = 0 \right\}$$

は　実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ。さらに V の次元を求めよ。

5

鉛直面内におかれた半径 a の円を円の中心 C を通る直線で二等分した質量 M の半円を考える．半円の質量の面密度は一定である．この鉛直面を xy 平面とし，y 軸の負の向きに重力が働く．重力加速度を g で表す．まず，xy 平面の原点 O で弧の二等分点 P が x 軸に接し，C が点 $(0,a)$ にあるように半円をおく．このとき，対称性から重心の位置は $(0,a-l)$ $(0<l<a)$ にある．l は半円の重心と C の間の距離である．この位置から直線 CP が鉛直線となす角度 θ が Θ $(0<\Theta<\pi/2)$ となるまで半円を滑らないように転がし，静かに放した．その後，半円は x 軸上を滑らずに転がるとする．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) 半円の運動に伴って，重心の位置 $(X(\theta),Y(\theta))$ は変動する．これが次式で与えられることを示せ．

$$(X(\theta),Y(\theta))=(a\theta-l\sin\theta,a-l\cos\theta)$$

(2) l を a を用いて表せ．また，C を通り，半円に垂直な直線を回転軸として，半円を回転させるときの慣性モーメント I を a と M を用いて表せ．

(3) Θ が微小な角度であるとして，半円の微小振動の角振動数を M，g，a のうち必要なものを用いて表せ．