平成25年度4月期，平成24年度10月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程
複雑系科学専攻

入学者選抜試験問題

【基礎科目】

平成24年7月22日 10:00 – 11:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 基礎科目は全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から3題選択して解答すること。4題以上選択した場合は、問題番号の若い順に3題のみ採点を行う。

(5) 各受験者に対し、解答用紙3枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙の全てに受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答用紙1枚につき1題を解答すること。
解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 解答用紙3枚全てを提出すること。 2題以下しか選択していない場合でも、選択予定の問題番号を記入し、必ず3枚の解答用紙を提出すること。

(8) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ は $[0,1]$ 上で連続であり、$f(0)=0, f(1)=1$ をみたす。さらに $0\le y-x<y+x\le 1$ ならば

$$\frac{1}{2x}\int_{y-x}^{y+x} f(t)dt = f(y)$$

が成り立つ。このとき以下の問いに答えよ。
(1) $0\le y-x<y+x\le 1$ ならば

$$\frac{f(y+x)+f(y-x)}{2}=f(y)$$

が成り立つことを示せ。
(2) $0\le i\le 2^n$ をみたす自然数 n と整数 i に対して

$$f\left(\frac{i}{2^n}\right)=\frac{i}{2^n}$$

が成り立つことを示せ。
(3) 任意の $x\in[0,1]$ に対して $f(x)=x$ が成り立つことを示せ。

2

次の連立微分方程式 (DE) を考える。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \text{(DE)}$$

(1) $t=0$ で初期値 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ をとる (DE) の解を求めよ。

(2) $x_0, y_0, z_0\in\mathbb{R}$ とする。$t=0$ で初期値 $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ をとる (DE) の解が $t\to\infty$ で $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ に収束するための必要十分条件は $x_0=y_0=0$ であることを示せ。

3

次の行列の rank（階数）が 2 となるような実数 a の値を全て求めよ。

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

4

$$f(x,y,z) = -2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 6xz$$

とする。
(1) 3 行 3 列の実対称行列 A で、任意の $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x,y,z) = (x\ y\ z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を満たすものを求めよ。
(2) (1) で求めた A に対して、3 行 3 列の直交行列 P で ${}^tPAP$ が対角行列となるものを一つ求めよ。ただし ${}^tP$ は P の転置行列である。
(3) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の上での $f(x,y,z)$ の最大値を求めよ。

5　棒 L 上を，なめらかに拘束されて運動する質量 m の質点がある．質点は，図 1 に示すように，棒 L の端点 O と，自然長 a，ばね定数 $m\omega_0^2$ のばねでつながれている．時刻 t における，質点と端点 O との距離を $r(t)$ として，以下の問に答えよ．ただし，棒 L の長さは十分に長いものとする．

(1) 図 1 に示すように，この棒 L が，水平面上で端点 O を中心として，角速度 $\dfrac{\omega_0}{\sqrt{10}}$ で回転しているとき，質点の運動方程式を，$r(t)$ を用いて書け．

(2) (1) で求めた運動方程式の解を求めよ．ただし，時刻 $t=0$ において，ばねの長さは自然長で，質点は棒に対して静止しているものとする．

(3) 次に，図 2 に示すように，端点 O を中心として，鉛直面内で角速度 $\dfrac{\omega_0}{\sqrt{10}}$ で棒 L を回転させる．ただし，棒 L は時刻 $t=0$ で水平であるものとし，ω_0，a と重力加速度 g の間には，$\omega_0^2=\dfrac{5g}{a}$ という関係が成立しているものとする．このときの質点の運動方程式を，$r(t)$ を用いて書け．

(4) (3) で求めた運動方程式の解を求めよ．ただし，時刻 $t=0$ において，ばねの長さは自然長で，質点は棒に対して静止しているものとする．

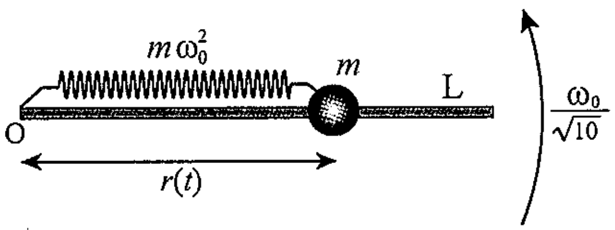

図 1

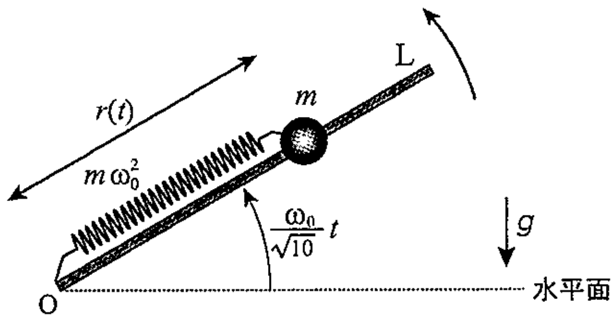

図 2