平成23年度

京都大学大学院情報学研究科修士課程
複雑系科学専攻

入学者選抜試験問題

【基礎科目】

平成22年7月19日 10:00 – 11:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 基礎科目は全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から3題選択して解答すること。4題以上選択した場合は、問題番号の若い順に3題のみ採点を行う。

(5) 各受験者に対し、解答用紙3枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙の全てに受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答用紙1枚につき1題を解答すること。
解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 解答用紙3枚全てを提出すること。 2題以下しか選択していない場合でも、選択予定の問題番号を記入し、必ず3枚の解答用紙を提出すること。

(8) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1

以下の問いに答えよ。

(1) a, b を実数とするとき、次の行列の固有値をすべて a, b を用いて表せ。

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

(2) $x_1 = 1, y_1 = 0, z_1 = 0$ であり、$n \geq 1$ で漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} & = -2x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} & = x_n - 2y_n + z_n \\ z_{n+1} & = x_n + y_n - 2z_n \end{cases}$$

をみたす数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}, \{y_n\}_{n\geq 1}, \{z_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 x_n, y_n, z_n を求めよ。

2

$f(x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ から原点 $(0, 0)$ を除いた領域上で定義された C^2 級の実数値関数とする。f に対して $F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で関数 F を定義するとき、以下の問いに答えよ。

(1) 任意の $(r, \theta) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ に対して、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 次の3つの条件 A, B, C をすべてみたす f をすべて求めよ。

A: 任意の $(x, y) \neq (0, 0)$ で

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

B: 任意の $(r, \theta) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ で $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = 0$

C: $\displaystyle\lim_{r \downarrow 0} F(r, 0) = 1$

3

$\mathbb{R}^3$ を通常のベクトルの和およびスカラー倍に関する実ベクトル空間と考えるとき以下の問いに答えよ。

(1) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R}, x + y + z = 0 \right\}$ とおく。U は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間となることを示し、さらに U の次元を求めよ。

(2) a, α, β を実数とし、

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -\beta \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

とおく。V が $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間となるための必要十分条件は $a = 0$ であることを示せ。さらに、$a = 0$ のとき、V の次元が 2 となるような (α, β) の組をすべて求めよ。

4

以下の問いに答えよ。

(1) z を変数とするべき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^3}$ の収束半径を求めよ。

(2) xy-平面の部分集合 $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ の上での関数 $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ の最大値、最小値を求めよ。

(3) xy-平面の部分集合 U を $U = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ で定義する。積分 $\displaystyle\int_U e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ の値を求めよ。

5

まっすぐで十分に長く細い棒 ℓ 上に拘束されて運動する質量 m の小さな物体がある．物体には，棒 ℓ から距離 a の点 P との間に，点 P との距離 r に比例する引力（比例係数 $m\omega^2$）が，物体と点 P を結ぶ線分の方向にはたらく．さらに，棒と物体の接触は粗く，物体には摩擦力がはたらく．摩擦力の大きさは，棒が物体に及ぼす垂直抗力の大きさに比例し，その静止摩擦係数が $\frac{3}{2}\mu$，運動摩擦係数が μ で与えられている．点 P から棒に下した垂線の足を原点 O として，下図に示すように棒に沿って x 軸を取り，時刻 t における物体の x 座標を $x(t)$ と表す．時刻 $t=0$ において，$x=b\ (>0)$ の位置から静かに物体を放すものとして，以下の問に答えよ．ただし，$b>\frac{7}{2}\mu a$ であり，重力の影響は考えないものとする．

(1) $t>0$ で，物体の速度が最初にゼロとなる時刻を t_1 とする．$0<t<t_1$ での物体の運動方程式を導出し，さらにその解 $x(t)$ を求めよ．

(2) t_1 を (1) で与えた時刻として，$t>t_1$ で，物体の速度が最初にゼロとなる時刻を t_2 とする．$t_1<t<t_2$ での物体の運動方程式を導出し，さらにその解 $x(t)$ を求めよ．

(3) t_2 を (2) で与えた時刻として，$0\leq t\leq t_2$ において，摩擦力が物体にした仕事の大きさを W とする．b を固定して，距離 a を $0<a<\frac{2b}{7\mu}$ の範囲で変化させるとき，W を最大とするような a を，b と μ を用いて表せ．