複雑系科学専攻　工業数学　参考問題

1. 次の積分を計算せよ。ここで、i は虚数単位であり $i^2 = -1$ である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(z-i)^2(z^2+4)} \mathrm{d}z$$

2. 複素平面内で、原点を中心とする半径 1 の円 C を考える。このとき、次の積分を計算せよ。ただし，積分の向きは反時計回りとする。

$$\int_C \left(\cos z - \frac{\sin z}{z^2} \right) e^{\frac{1}{z}} \mathrm{d}z$$

3. 区間 $(-\pi, \pi)$ で $f(x) = x|x| + x^2$ と定義される関数 f を、次のようにフーリエ級数に展開する。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

このときのフーリエ係数 a_0, a_n, b_n を求めよ。

4. 2 次元半無限領域 $\Omega = \{(x,y) | -\infty < x < \infty, y > 0\}$ において、次の境界値問題を考える:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad (x,y) \in \Omega \tag{1}$$

$$u(x,0) = f(x) \quad -\infty < x < \infty \tag{2}$$

$$u(x,y) \to 0 \quad (y > 0 \text{ を保ちつつ } x^2 + y^2 \to \infty \text{ とするとき})$$

を満たす十分滑らかな関数 $u(x,y)$ を求める。ここで、$f(x)$ は絶対可積分な既知関数である。このとき、次の各問に答えよ。

(a) 次の文中の $\boxed{\text{(A)}}$ を埋めよ。ただし、$u(x,y)$ の x に関するフーリエ変換の存在は仮定してよい。

式 (1)、及び (2) の両辺を x についてフーリエ変換すると次のようになる。

$$\begin{cases} \boxed{\text{(A)}}\,\hat{u}(\xi,y) + \dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\xi,y) = 0, \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi). \end{cases}$$

ここで、$\hat{u}(\xi,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x$, $\hat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x$ である。

(b) $\hat{u}(\xi,y)$ を $\hat{f}(\xi)$ を用いて表せ。

さらに、上の境界値問題で $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ と与えられたときの $u(x,y)$ を求めたい。

(c) このときの $\hat{f}(\xi)$ を求めよ。

(d) $u(x,y)$ を求めよ。

5. 線形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (A: $n \times n$ 実行列で、正則とする。$\boldsymbol{b}$: 与えられた n 次実ベクトル、$\boldsymbol{x}$: 未知の n 次実ベクトル) の Gauss の消去法による解法について、次の問に答えよ。

   (a) 部分 pivoting を伴う Gauss の消去法のアルゴリズムを記せ。

   (b) 部分 pivoting を行なわなくても Gauss の消去法が実行できる場合でも、部分 pivoting を行なう事が望ましい理由を述べよ。

   (c)
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   のとき、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を Gauss の消去法で解け。

6. (1) 次の常微分方程式と初期条件

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) - 3u(t) = 9t \quad (t > 0), \qquad u(0) = 0$$

を満たす関数 $u(t)$ を求めよ.

(2) 次の常微分方程式と初期条件

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u(t) - 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) + 6u(t) = 9t \quad (t > 0), \qquad u(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(0) = 0$$

を満たす関数 $u(t)$ を求めよ.

7. C は複素平面上の単純閉曲線で, C で囲まれた領域は $z = \dfrac{\pi}{2}$ をその内部に含んでいる. C を反時計回りに向きづけたとき, 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{z \sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3}\mathrm{d}z$ の値を求めよ.

8. 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $a_0 = 1$, $a_1 = 1/2$ であって, 実数の定数 α, β に対して漸化式

$$a_{n+2} = (\alpha\, a_{n+1}) + (\beta\, a_n) \qquad (n \geq 0) \qquad (*)$$

を満たしている. このとき以下の設問に答えよ.

(1) (i) $(\alpha, \beta) = (5/6, -1/6)$, (ii) $(\alpha, \beta) = (-3/2,\ 1)$, (iii) $(\alpha, \beta) = (-5/6, 2/3)$ の 3 つの場合に, a_n をそれぞれ n の式で表せ.

(2) 計算機を利用して, IEEE754 に規定される単精度浮動小数点数を用いて (1) の (i), (ii), (iii) の 3 つの場合について $\{a_n\}_{n=2}^{100}$ の計算を行った. 計算手順は以下のとおりである. まず式 $(*)$ において $n = 0$ とし, 既知の a_0, a_1, α, β を用いて式 $(*)$ の右辺を計算することにより a_2 を求めた. その際, 式 $(*)$ の右辺の計算においては, 括弧内の積の計算を行ってから 2 項の和の計算を行った. さらに, n の値を 1 から 98 まで順次変えて, a_2 の計算と同様な方法で $\{a_n\}_{n=3}^{100}$ を計算した. その計算結果を (1) で求めた厳密な値と比較したところ, (i) と (ii) の場合の計算結果は厳密な値を近似していたが, (iii) の場合は n が大きくなるにつれて厳密な値との差が大きくなり, a_{100} の値では大きな相違が見られた. このような計算結果となった理由を (i), (ii), (iii) の 3 つの場合ごとに説明せよ.

(3) (2) で (iii) の場合の計算において, 式 $(*)$ 右辺の計算手順を変えて

$$\frac{-5a_{n+1} + 4a_n}{6}$$

として, $-5a_{n+1}$ と $4a_n$ の和を 6 で割るという手順で数値計算を実行すると, 計算結果はどのようになると考えられるか. 理由をつけて予想せよ.

9

次の各問のそれぞれに答えよ.

問 1. $f(x) = xe^{-|x|}$ の Fourier 変換

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}e^{-ix\xi}dx \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

を計算せよ.

問 2. (1) 複素平面の原点 $z=0$ の近傍で定義された関数 $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ について $z=0$ でのべき級数展開を与え，その収束半径を求めよ.

(2) C_r は複素平面の原点を中心とする半径 $r>0$ の円周を表すとする. $r \neq 2$ のとき，複素積分

$$\int_{C_r} \frac{\cos \pi z}{z^3(z-2)}\, dz$$

の値を求めよ. ただし C_r は反時計まわりに向き付けられているものとする.

問 3. Γ は $\mathbb{R}^3$ の有界で滑らかな連結閉曲面で，Ω は Γ で囲まれた $\mathbb{R}^3$ の有界領域とする. 次の境界値問題を考える:

$\Omega \cup \Gamma$ 上の滑らかな関数 $f(x)$ と Γ 上の滑らかな関数 $g(x)$ とを与えて,

$$\Delta u(x) = -f(x) \qquad x \in \Omega, \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x) \qquad x \in \Gamma. \qquad (*)$$

を満たす滑らかな関数 $u(x)$ $(x \in \Omega \cup \Gamma)$ を求める. ここに $x = (x_1, x_2, x_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の点を表し，Δ は $\mathbb{R}^3$ の Laplace 作用素，$\partial/\partial n$ は Γ 上の外向き法線方向微分を表すものとする. このとき，次の (1)–(3) に答えよ.

(1) $(*)$ の解 u が存在するとき,

$$\int_\Omega f(x)\, dx + \int_\Gamma g(x)\, dS = 0$$

が成立することを示せ. ただし $dx = dx_1\, dx_2\, dx_3$ とし，dS は Γ の面素を表す.

(2) $(*)$ の解 u は次式を満たすことを示せ.

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx + \int_\Gamma g(x)v(x)\, dS \qquad (**)$$

ここに $v(x)$ は $\Omega \cup \Gamma$ で定義された滑らかな任意関数であり，$\nabla u(x)$ は関数 $u(x)$ の勾配である.

(3) $(*)$ の解 u の数値計算法のうち，$(**)$ を利用するものを一つ挙げ，その方法の概要と特徴について述べよ.

10

次の各問のそれぞれに答えよ.

問 1 $f(x) = e^{-|x|}\sin x$ の Fourier 変換

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\sin x\, e^{-ix\xi}\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

を計算せよ.

問 2 次の積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^4+1}\, dx$$

問 3 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ は $\mathbb{R}^n$ $(n>0)$ の元とし, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の第 i 成分をそれぞれ u_i, v_i $(i=1,2,\cdots,n)$ と書く. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $n \times n$ 行列 A の (i,j) 成分 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,n)$ が

$$a_{ij} = \begin{cases} 1+u_iv_j, & i=j \\ u_iv_j, & i \neq j \end{cases}$$

で与えられているものとする. このとき, 与えられた任意の $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w} \qquad (*)$$

の解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が唯一つ存在するための必要十分条件を $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を用いて表せ. また, このとき, $(*)$ の解 $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ を用いて表せ.

(2) A が正則であるとき, 方程式 $(*)$ の解を次の反復計算によって求めたい.

$$\boldsymbol{x}^{(I+1)} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}^{(I)}) \quad (I=0,1,2,\cdots) \qquad (**)$$

ここに, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積であり, $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ は初期仮定である. 任意の $\boldsymbol{x}^{(0)}$ に対して $I \to \infty$ のとき $(**)$ の $\boldsymbol{x}^{(I)}$ が $(*)$ の解に収束するための必要十分条件を求めよ.