連続体力学　1

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1

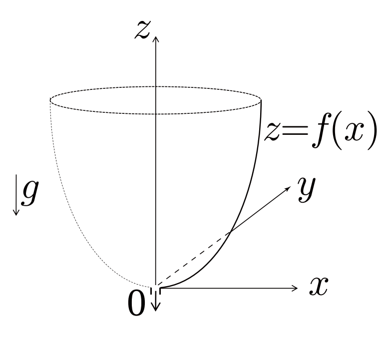
重力の作用の下での，一定の密度 ρ をもつ非圧縮性の非粘性流体（完全流体）の流れを考え，デカルト座標 (x, y, z) におけるこの流体の速度の (x, y, z) 成分を (u_x, u_y, u_z) とする．ただし，z 軸は鉛直上向きにとり，重力加速度の大きさは g とする．このとき，以下のすべての問に答えよ．

(1) この流体の質量保存則から，連続の式を導出せよ．

(2) この流体の運動方程式から，定常流に対するベルヌーイの定理を導出せよ．ただし，流体の圧力を p とする．

(3) 下図のように，原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ を通り，$x \geq 0$ の区間で単調増加関数 $z = f(x)$ によって定義された xz 平面上の曲線を考え，この曲線を z 軸の周りに回転させた形状を持つ容器に，この流体が入っているとする．そして，容器の底（原点付近）には面積 S の小さい穴があいており，この穴から流体が流れ落ちるものとする．このとき，水面の面積が S よりもずっと大きいという仮定の下で，ベルヌーイの定理から，水面の位置が $z = z_0$（ただし $z_0 > 0$）であるときの流体の穴からの流出速度を求めよ．

(4) (3) で考えた容器の穴からの流体の流出の問題において，関数 $f(x)$ が正の定数 r と b を用いて $f(x) = rx^b$ と表せるとき，(3) で得られた流体の流出速度から計算される水面の降下速度が一定となるような b の値を求めよ．



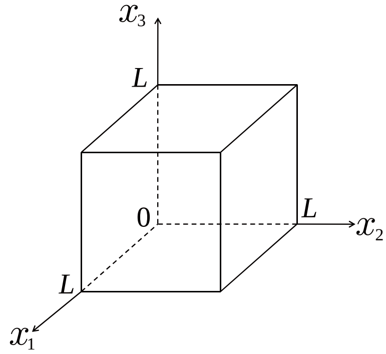
連続体力学　1

問 2

デカルト座標系 (x_1, x_2, x_3) における応力テンソルの (i,j) 成分 σ_{ij} と歪みテンソルの (i,j) 成分 κ_{ij} が

$$\sigma_{ij} = \lambda \left(\sum_{\ell=1}^{3} \kappa_{\ell\ell} \right) \delta_{ij} + 2\mu\kappa_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

の関係を満たす弾性体からなる，１辺の長さが L の立方体を考える．ここで，λ, μ は正の定数であり，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．この立方体は，右図のように $x_3 = 0$ のなめらかな剛体平板の上に置かれており，その６つの面は，$x_j = 0,\ x_j = L\ \ (j = 1, 2, 3)$ で表されるとする．また，重力の効果は無視できるものとする．このとき，この弾性体の歪みはつねに微小であると仮定して，以下のすべての問に答えよ．



(1) この立方体の $x_3 = L$ の面全体に，単位面積あたりの大きさが F の微小な力を下向き（x_3 軸負方向）に加えたところ，立方体は直方体へと変形し，その x_3 軸方向の長さが ΔL_1 だけ短くなった．この場合の歪みテンソルの対角成分 κ_{11}，κ_{22}，κ_{33} および ΔL_1 を λ, μ, F, L を用いて表す式を導け．また，この変形に伴う弾性体の体積の増加量あるいは減少量を λ, μ, F, L を用いて表す式を導け．

(2) この立方体の $x_1 = 0$ と $x_1 = L$ の面をなめらかな剛体の平板ではさんで，これらの面を x_1 方向には固定した上で，$x_3 = L$ の面全体に (1) の場合と同じ力を加えたところ，その x_3 軸方向の長さが ΔL_2 だけ短くなった．この場合の κ_{11}, κ_{22}，κ_{33}，ΔL_2 を λ, μ, F, L を用いて表す式を導け．また，変形後にこの弾性体が $x_1 = 0$ と $x_1 = L$ の剛体平板を押している力の単位面積あたりの大きさを λ, μ, F, L を用いて表す式を導け．さらに，ΔL_2 と (1) で求めた ΔL_1 のいずれが大きいかを，計算に基づいて示せ．

連続体力学　2

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1

デカルト座標系 (x_1,x_2,x_3) において，連続体中の点 $(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$ における応力テンソル T が

$$T = \begin{pmatrix} \beta & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と表されるとする．ここで，T の (i,j) 成分は，$x_j = 0$ の面を通して，$x_j > 0$ の側が反対側に及ぼす応力の x_i 成分を表し，β は実定数である．このとき，以下のすべての問に答えよ．

(1) $x_1 + x_3 = 0$ の面を通して，$x_1 + x_3 < 0$ の側が反対側に及ぼす応力ベクトルを求めよ．

(2) $x_1 + x_2 = 0$ の面を通しての法線応力の大きさと接線応力の大きさが等しくなるような β の値を求めよ．

(3) 次の 2 条件を満たすような β の値を求めよ．

- 法線ベクトルが $\boldsymbol{n}$ である面を通して，$\boldsymbol{n}$ の向いた側が反対側に及ぼす応力ベクトルを $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n})$ としたとき，すべての $\boldsymbol{n}$ の向きに対する $|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n})|$ の中で最大の値は 3 である．
- $|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n})| = 3$ となるときの $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n})$ は，法線ベクトルが $\boldsymbol{n}$ である面の両側の連続体が互いに引っ張り合うようなものとなる．

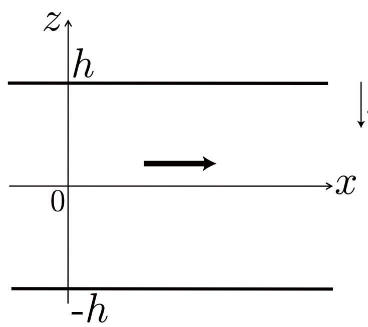
連続体力学　2

問 2

下図のように，z 軸を鉛直上向きに取ったデカルト座標系 (x, y, z) において，$z = -h$ と $z = h$ の位置にある 2 枚の平行平板の間の非圧縮性粘性流体の定常流を考える．そして，重力加速度の大きさを g とする．また，流体の速度ベクトルの y 成分と z 成分は 0 であり，速度ベクトルの x 成分は y に依存しないとする．このとき，以下のすべての問に答えよ．

(1) x 軸方向に圧力勾配 $\dfrac{\partial p}{\partial x} = -c$ （c は正の定数）が存在するが，y 軸方向の圧力勾配は 0 であるとする．また，2 枚の平板は静止しているとする．このときの 2 平板間の粘性係数 μ，密度 ρ の流体の速度分布を，流体の運動方程式と連続の式から導出せよ．また，流体がこれらの平板に及ぼす接線応力の大きさを求めよ．

(2) 2 枚の平板の間に 2 種類の流体がはさまれている場合を考える．すなわち，$0 < z < h$ には粘性係数 μ，密度 ρ の流体 1 があり，$-h < z < 0$ には粘性係数 2μ，密度 2ρ の流体 2 があるとする．そして，$z = -h$ の平板は静止しており，$z = h$ の平板は，大きさ U の速度で x 軸正方向に動いているとする．また，水平方向の圧力勾配は 0 であるとする．このときの流体の速度分布を，運動方程式と連続の式から導出せよ．また，$z = h$ の平板での流体の圧力と $z = -h$ の平板での流体の圧力の差を求めよ．



連続体力学　3

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1

2 次元直角座標系を O-xy とする．密度 ρ の非圧縮性非粘性流体の 2 次元定常流が，図 1 のように，遠方で x 軸正方向に速さ U で流れる一様流となるような，原点を中心とする半径 a の静止した円のまわりの流れである場合を考える．この流れの速度の x 成分 u と y 成分 v が次の形で表されているとする．

$$\begin{cases} u = \alpha + \dfrac{\beta x^2 + \gamma y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ v = \dfrac{\delta xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

ここで，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数である．このとき，重力の効果は無視できるとして，以下のすべての問に答えよ．

(1) 定数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を a と U を用いて表せ．

(2) $x \to -\infty$ における圧力が y によらず一定の値 p_0 であるとする．このとき，点 $(x, y) = (0, 2a)$ における圧力の値を求めよ．

(3) 点 $(x, y) = (2a, 0)$ にある流体の微小部分の加速度を求めよ．

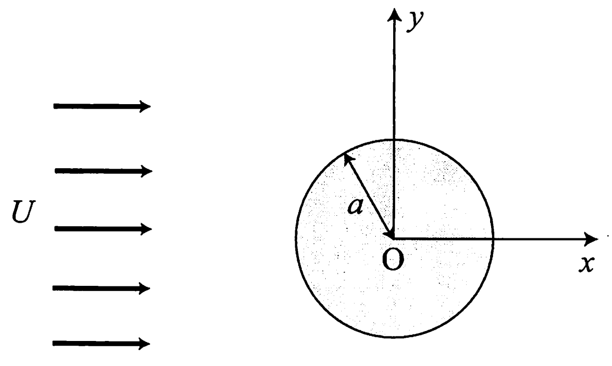


図 1

問 2

3 次元直角座標系を O-$x_1x_2x_3$ とし，一定の密度 ρ をもつ連続体における応力テンソルの各成分 σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ が，x_1, x_2, x_3 と時刻 t の関数として与えられているものとする．いま，連続体のある微小部分の加速度の (x_1, x_2, x_3) 成分を $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ とし，この微小部分に働く単位質量あたりの外力の (x_1, x_2, x_3) 成分を (F_1, F_2, F_3) とする．このとき，この微小部分についての運動方程式を導出せよ．ただし，σ_{ij} は，x_j の値が一定となる平面を通して，x_j の大きい側が小さい側に及ぼす応力の x_i 成分を表す．

連続体力学4

次の各問のそれぞれに答えよ．

問１

2次元デカルト座標系 O-xy の x, y と $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ によって関係づけられる極座標系 r, θ を考える．いま，$r \geq a$ の領域にある密度 ρ の非圧縮性非粘性流体の2次元定常流れを考え，点 (r, θ) における流体速度の r 方向成分 u_r および θ 方向成分 u_θ が次の形に表せるものとする．

$$u_r = 0, \quad u_\theta = f(r) \tag{$*$}$$

ここで，a は正定数であり，$f(r)$ は $r \geq a$ で微分可能な r の関数であるとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 速度場 $(*)$ は連続の方程式（質量保存則）を満たすことを示せ．

(2) 点 (r, θ) における流体粒子（流体の微小部分）の加速度の大きさと向きを求めよ．

(3) 歪み速度テンソルのすべての成分が，流体中のすべての場所で0となるような $f(r)$ の形を求めよ．

(4) $f(r) = Cr^\beta$ （ただし，C と β は正定数）であり，$r = a$ における流体の圧力を p_0 としたとき，$r = b$ における流体の圧力を求めよ．ただし，$b > a$ とする．

問２

遠方において一定速度 $\boldsymbol{U}$ で流れている密度 ρ，粘性係数 μ の非圧縮性粘性流体を考え，その中に静止物体が置かれているとする．このとき，この物体のまわりの流体運動の速度を $\boldsymbol{u}$，圧力を p とし，重力は無視できるものとする．以下の問に答えよ．

(1) この流体の運動方程式，連続の方程式（質量保存則），および，物体表面での境界条件を書け．

(2) (1) で示した方程式と条件式を用いて，この流体の運動に関するレイノルズの相似法則を説明せよ．

連続体力学5

次の各問のそれぞれに答えよ．

問1

図1のように，点Oを中心とする半径 R_1 と R_2 （$R_2 > R_1$）の2つの円にはさまれた領域内の，密度 ρ，粘性係数 μ の非圧縮性粘性流体の2次元流れを考える．点Oを中心とする極座標の動径方向座標を r，周方向座標を θ とする．内側の円と外側の円が，それぞれ点Oのまわりを角速度 Ω_1, Ω_2 で回転するときの，動径方向の速度成分が0である定常な軸対称流れを考える．また，重力の影響は無視できるとする．このとき，以下の問に答えよ．

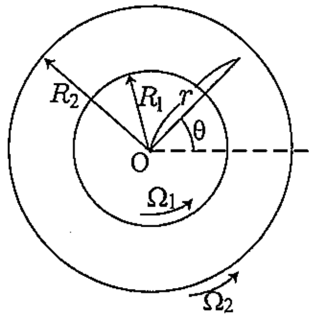


図1

(1) 非圧縮性粘性流体の運動方程式から，流体の速度の周方向成分 v_θ は r の関数として次の形で表されることがわかる．

$$v_\theta(r) = ar + \frac{b}{r}, \quad (R_1 \leq r \leq R_2)$$

この定数 a, b を，$R_1, R_2, \Omega_1, \Omega_2$ を用いて表せ．

(2) $r = r_0$ の円周上を動く流体粒子（流体の微小部分）の加速度の大きさを求めよ．その際に，(1) の a, b を用いてもよい．ただし，$R_1 < r_0 < R_2$ とする．

(3) 流体が内側の円に及ぼす接線応力の大きさを求めよ．その際に，(1) の a, b を用いてもよい．

問2

1辺の長さが L の等方的フック弾性体からなる立方体を考え，図2のように，その底面の頂点をA, B, C, Dとし，上面の頂点を A′, B′, C′, D′ とする．この立方体の4つの側面の各々に対して、単位面積あたりの大きさが f の力を，図3のように，底面に平行で各側面と $\pi/4$ の角度をなす方向に，一様に加える（図3は，上から見た図である）．

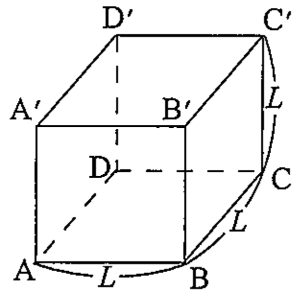


図2

なお，考えている弾性体では，デカルト座標系 O-$x_1x_2x_3$ での応力テンソルの (i,j) 成分 σ_{ij} と歪みテンソルの (i,j) 成分 κ_{ij} が，正の定数 λ, ν を用いて

$$\sigma_{ij} = \lambda \left(\sum_{\ell=1}^{3} \kappa_{\ell\ell} \right) \delta_{ij} + 2\nu\kappa_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

で関係づけられているとし，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．また，重力の影響は無視でき，応力テンソル，歪みテンソルの値はこの弾性体中で一様であるとする．このとき，以下の問に答えよ．

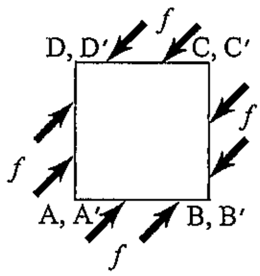


図3

(1) 力が加わって歪んだ弾性体の高さ（上面と底面の距離）を求めよ．

(2) 力が加わって歪んだ弾性体の底面の2つの対角線の長さをそれぞれ求めよ．

連続体力学６

次の各問のそれぞれに答えよ．

問１

３次元デカルト座標系 O-xyz の原点Oを中心とする半径 a の静止した球のまわりの非圧縮性非粘性流体の流れを考える．この流れの速度の x, y, z 成分である u, v, w が

$$u = U\left[1 + \frac{a^3}{2R^3} - \frac{3a^3x^2}{2R^5}\right],\ v = -\frac{3Ua^3xy}{2R^5},\ w = -\frac{3Ua^3xz}{2R^5}$$

で表されるものとする．ただし，$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であり，U は正の定数である．また，流体の密度を ρ_0 とする．このとき，重力の効果は無視できるとして，以下の問に答えよ．

(1) この速度場は，非粘性流体が球の表面で満たすべき境界条件を満たしていることを示せ．

(2) 点 $(x, y, z) = (0, a, 0)$ における流体粒子（流体の微小部分）の加速度の大きさと向きを求めよ．

(3) $R \to \infty$ での流体の圧力を p_0 としたとき，点 $(x, y, z) = (0, a, 0)$ における流体の圧力を求めよ．

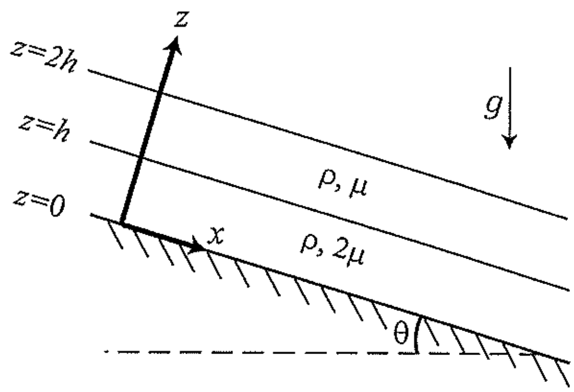
問２

図のように，水平面に対して角度 θ の傾きをもつ斜面に沿って層状に流れる２つの非圧縮性粘性流体を考える．上層と下層の流体の粘性係数はそれぞれ $\mu, 2\mu$ であり，いずれの流体の密度も ρ であるとする．また，上層と下層の流体の厚さはいずれも h であり，上層の流体の上端は自由表面であるとする．図のように，斜面に沿って下向きに x 軸，斜面に垂直な斜め上方向に z 軸をとり，斜面を $z = 0$ とする．２つの流体の運動は x 軸方向に流れる２次元定常流であるとし，自由表面 $(z = 2h)$ では，圧力は一定値 p_0 をとり，接線応力は０であるとする．また重力加速度の大きさを g とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 斜面上での圧力，および２つの流体の界面 $z = h$ での圧力を求めよ．

(2) 自由表面 $z = 2h$ と２つの流体の界面 $z = h$ における流体の速度をそれぞれ求めよ．

(3) 斜面上での接線応力の大きさを求めよ．



連続体力学7

次の各問のそれぞれに答えよ．

問1

図1のように，水平面に対して角度 θ だけ傾いた2枚の平行平板 A と B の間の，密度 ρ，粘性係数 μ の非圧縮性粘性流体の運動を考える．ここで，$0 < \theta < \pi/2$ とする．デカルト座標系 O-xyz の x 軸を平板に沿った水平方向に，y 軸を平板に沿って上向きにとり，z 軸を平板の法線方向に斜め上を向くように定める．平板Aは $z = 0$，平板Bは $z = -h$ で表されているとし，平板Aは y 軸正方向に一定の速さ V で動いており，平板Bは x 軸正方向に一定の速さ U で動いているとする．

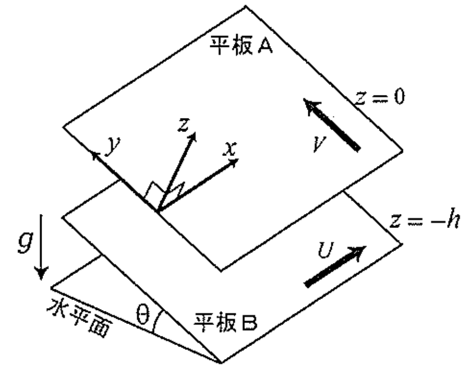


図1

また，流体の流れは定常であって平板に平行であり，流体の速度の (x, y) 成分である (u, v)，および圧力 p は，いずれも x, y に依存しないものとする．このとき，重力加速度の大きさを g として，以下の問に答えよ．

(1) 平板Bでの圧力を p_0 としたとき，平板Aでの法線応力と接線応力の大きさを，$U, V, h, \theta, g, \mu, \rho, p_0$ を用いて表せ．

(2) $z = -h/2$ での流体の速度ベクトルの x 成分と y 成分の大きさが等しくなるための条件を，$U, V, h, \theta, g, \mu, \rho$ を用いて表せ．

問2

単位質量あたり $\boldsymbol{F}$ の体積力の作用の下で加速度運動をしている均質な連続体中の，ある面 S を通しての応力を考える．図2に示したこの面 S の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向いた側が反対側に及ぼす応力ベクトルを $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n})$ とし，法線ベクトル $-\boldsymbol{n}$ の向いた側が反対側に及ぼす応力ベクトルを $\boldsymbol{\sigma}(-\boldsymbol{n})$ としたとき，$\boldsymbol{\sigma}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n})$ であることを，図2に示したような薄い微小直方体の運動方程式から導け．

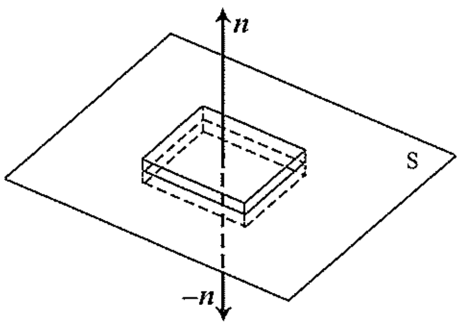


図2