$\boxed{1}$ 次の各問にそれぞれ答えよ.

問 1 $f(x)$ は実数 $\mathbb{R}$ 上で定義された連続的微分可能な関数で

$$f(x) + \int_0^x (x-y)f'(y)dy = x^2$$

を満たしている. $f(x)$ を求めよ.

問 2 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $a_0 = 2,\ a_n = (a_{n-1})^2 \quad (n \geq 1)$ を満たしている. このとき, べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a_n}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

の収束半径を求めよ.

問 3 $A = (a_{ij})$ を正則な n 次実正方行列とし, $x, b \in \mathbb{R}^n$ とする. 連立方程式 $Ax = b$ の数値解法として, 軸選択を施さない場合の Gauss 消去法のアルゴリズムを説明せよ.

$\boxed{2}$ 次の各問にそれぞれ答えよ.

問 1 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ の値を求めよ.

(2) $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ とし，$f(x) = \exp(-|x|^2)$ とする．このとき $f(x)$ の Fourier 変換

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx$$

を求めよ．但し，$dx = dx_1 dx_2$ であり，$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2$ とする.

問 2 $y(x)$ に対する次の常微分方程式の初期値問題を解いて $y(x)$ を求めよ.

$$y'(x) + xy(x) + x = 0 \quad (x > 0), \quad y(0) = 0.$$

問 3 $f(x)$ は実数 $\mathbb{R}$ 上の C^2 級実数値関数で，ある正数 C に対して

$$|f(x)| < C, \quad |f'(x)| < C, \quad |f''(x)| < C$$

を満たしているとする．$x = \alpha$ を f の単純零点，すなわち $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0$ とする．このとき，この α を近似的に求めるための Newton 法のアルゴリズムを説明せよ．また Newton 法の初期値が α に十分近ければ，Newton 法によって生成された数列が α に収束することを示せ.

$\boxed{3}$ 次の各問にそれぞれ答えよ.

問 1 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ.

問 2 熱方程式の初期値境界値問題

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \quad t>0, -1<x<1,\\
&u(t,-1) = u(t,1) = 0, \quad t>0,\\
&u(0,x) = 1-x^2, \quad -1<x<1
\end{aligned}
$$

の解を Fourier 級数を利用して求めよ.

問 3 $A=(a_{ij})$ を n 次の実正方行列とする. このとき, A が優対角行列, すなわち

$$
|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad 1\leq i\leq n
$$

を満たすとき, A は正則行列であることを示せ.

$\boxed{4}$ 次の各問にそれぞれ答えよ.

問 1 複素平面上で $z = 0$ の近傍で定義された正則関数 $f(z)$ が，$z = 0$ の近傍で複素数 c に対して $f(z) = zf'(z) + cz$ を満たしている．このとき，複素数 c の満たすべき条件を求め，さらに $f(z)$ を求めよ.

問 2 熱方程式の初期値問題

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \quad 0 < t < 1, x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

を考える．この初期値問題に対する陽的差分法を次の $(*)$ で与える:

$$\frac{u^{k+1}(x) - u^k(x)}{\Delta t} = \frac{u^k(x+\Delta x) - 2u^k(x) + u^k(x-\Delta x)}{\Delta x^2}, \quad 0 \le k < K, \qquad (*)$$
$$u^0(x) = u_0(x).$$

ここで，$\Delta x > 0, \Delta t > 0$ とし，K は $1/\Delta t$ を越えない最大の整数とする．$\lambda = \Delta t/\Delta x^2$ として λ を固定した上で $\Delta x, \Delta t$ が動くとき，次に答えよ.

(1) 初期値 $u^0(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で有界な連続関数とする．$0 < \lambda \le 1/2$ のとき，スキーム $(*)$ は sup ノルムで安定，すなわち

$$\sup|u^k(x)| \le \sup|u_0(x)|, \quad 1 \le k \le K$$

が成立することを示せ.

(2) 初期値 $u^0(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で有界かつ十分滑らかな関数とし，この初期値問題に対し，十分滑らかな解がただひとつ存在するとする．$0 < \lambda \le 1/2$ のとき，スキーム $(*)$ は sup ノルムで収束性をもつことを示せ.

$\boxed{5}$ 次の各問にそれぞれ答えよ．

問 1 複素平面上で 2 つの曲線

$$C_1 = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z - i| = 1, \ \mathrm{Re}(z) > 0\},$$
$$C_2 = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z - 1| = 1, \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

を考え，$f(z) = z^2$ による C_1, C_2 の像を $f(C_1), f(C_2)$ と表す．このとき，2 つの曲線 $f(C_1)$ と $f(C_2)$ の交点におけるそれぞれの接線のなす角を θ とするとき，θ を求めよ．ただし $0 \le \theta < \pi$ とする．

問 2 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ の値を求めよ．

問 3 熱方程式の初期値問題

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x), \quad 0 < t < 1, x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

を考える．この初期値問題に対する陽的差分法を次の $(*)$ で与える:

$$\frac{u^{k+1}(x) - u^k(x)}{\Delta t} = \frac{u^k(x+\Delta x) - 2u^k(x) + u^k(x - \Delta x)}{\Delta x^2}, \quad 0 \le k < K, \tag{$*$}$$
$$u^0(x) = u_0(x).$$

ここで，$\Delta x > 0, \Delta t > 0$ とし，K は $1/\Delta t$ を越えない最大の整数とする．$\lambda = \Delta t / \Delta x^2$ として λ を固定した上で $\Delta x, \Delta t$ が動くとき，次に答えよ．

(1) $u^0(x) \in L^2(\mathbb{R})$ とする．$0 < \lambda \le 1/2$ のとき，スキーム $(*)$ は $L^2(\mathbb{R})$ で安定，すなわち

$$\int_{\mathbb{R}} |u^k(x)|^2 dx \le \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx$$

が成立することを示せ．

(2) n を整数とし，$u^0(x) = e^{inx}$ とするとき，$(*)$ によって定まる $u^k(x)$ を求めよ．

(3) $\lambda > 1/2$ の場合，スキーム $(*)$ の $L^2(\mathbb{R})$ の意味での安定性について説明せよ．

$\boxed{6}$ 次の各問にそれぞれ答えよ．

問 1 $A = (a_{ij})$ を複素数を成分とする n 次正方行列とし，λ を A の固有値とする．このとき，

$$|\lambda| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

が成立することを示せ．

問 2 実数 x, y に対して複素数 $z = x + \sqrt{-1}y$ とする．このとき，

$$u(x,y) = \begin{cases} \mathrm{Re}\left(\exp\left(-\dfrac{1}{z^4} \right) \right), & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

とするとき，原点を含む開集合上で

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y)$$

を計算せよ．また，この $u(x,y)$ はこの開集合上では C^2 級関数ではないことを示せ．

問 3 $A = (a_{ij})$ を正則な n 次の実正方行列とし，$x, b \in \mathbb{R}^n$ とする．連立方程式 $Ax = b$ を数値的に解くための反復解法のアルゴリズムをひとつ挙げ，このアルゴリズムの特徴などを説明せよ．

$\boxed{7}$ 次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　a を正の定数とするとき，定積分

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx$$

の値を求めよ．

問 2　Ω を $\mathbb{R}^3$ の有界領域とし，その境界 Γ は滑らかであるとする．a を正の定数とするとき，調和関数の境界値問題

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} + au = f \quad \text{on } \Gamma$$

の解は，存在すれば唯一つであることを示せ．ただし，$\dfrac{\partial}{\partial n}$ は Γ 上の外向き法線微分を表し，f は Γ 上の滑らかな関数とする．

問 3　$f(x)$ を区間 $[0, 1]$ 上の滑らかな関数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を数値的に求めることを考える．以下の問に答えよ．

(1) 自然数 n に対して $h = \dfrac{1}{n}$ とし，$x_k = kh\ (0 \leq k \leq n)$ とするとき，この分点を用いて定積分 I に対する中点公式，および台形公式を与えよ．

(2) (1) で与えた台形公式による値を I_T と表すとき，ある正数 C が存在して

$$|I - I_T| \leq Ch^2$$

が成立することを示せ．

8 次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　$f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ 上の 2 回連続的微分可能な関数とする．定積分 $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ の近似値を中点法により求めることを考える．すなわち m を正整数とし，

$$I_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{m}\right)$$

により I の近似値とするとき，$\lim_{m\to\infty} m(I - I_m)$ の値を求めよ．

問 2　$f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数で，開区間 $(0,1)$ 上で微分可能であるとする．0 と異なる実数 ϵ に対して

$$F(\epsilon) := \int_0^1 \frac{f(x)}{x - \left(\frac{1}{2} + i\epsilon\right)} dx$$

とするとき，$\lim_{\epsilon\to+0}\bigl(F(\epsilon) - F(-\epsilon)\bigr)$ の値を求めよ．ただし i は虚数単位である．

問 3　k を正の実数とするとき，$\mathbb{R}^3$ における Helmholtz 方程式

$$\triangle u + k^2 u = 0 \qquad (*)$$

を考える．ここで $\triangle$ は 3 次元 Laplacian とする．$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ とするとき，恒等的に 0 ではなく，$|x|$ のみに依存する滑らかな関数で $\mathbb{R}^3$ 全体で Helmholtz 方程式 $(*)$ を満たす関数を求めよ．

9　次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　$y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ が常微分方程式の Cauchy 問題

$$\frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2 + y_3, \qquad y_1(0) = 1,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2 + y_3, \qquad y_2(0) = 2,$$
$$\frac{dy_3}{dx} = y_1 + y_2 + 2y_3, \qquad y_3(0) = 1,$$

を満たしているとき，$y_2(x)$ を求めよ．

問 2　Γ を xy 平面の単位円周とし，$d\sigma$ を Γ に沿う線素とする．このとき曲線 Γ に沿う線積分

$$\int_\Gamma (x^4 + y^4)\, d\sigma$$

の値を求めよ．

問 3　M を正定数とし，$f(x)$ は実数 $\mathbb{R}$ 上の連続関数で，$|x| > M$ では $f(x) = 0$ とする．虚数単位を $i = \sqrt{-1}$ とするとき，以下の設問に答えよ．

(1) 複素数 z に対して

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} f(x)\, dx$$

によって複素関数 $F(z)$ を定めるとき，$F(z)$ は z の正則関数であることを示せ．

(2) $|z| > M$ において $F(z) = 0$ であるとき，$f(0)$ を求めよ．

１０ 次の各問のそれぞれに答えよ.

問 1　常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2+2xy+2y^2}{x^2+4xy+5y^2}, \quad y(0)=1$$

を解け.

問 2　$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & -3 \\ 7 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ とし, P を 4 次の正則な正方行列とする. このとき $\operatorname{tr} A - \operatorname{tr} P^{-1}AP$ を求めよ. 一般に n 次正方行列 $X = (x_{ij})$ に対して, $\operatorname{tr} X = x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{nn}$ である.

問 3　偏微分方程式の初期値問題

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + x\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0, \quad u(0,x) = x^2$$

を $(t,x) = (0,0)$ の近傍で満たす関数 $u(t,x)$ を 1 つ求めよ.

11 次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　連立常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

の解を求めよ．

問 2　(1) $x = 0$ の近傍で収束する羃級数で表された関数

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

が微分方程式

$$y''(x) + \frac{x-1}{2x}\, y'(x) + \frac{1}{2x^2}\, y(x) = 0$$

を満たすとき，この $y(x)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた羃級数で表された関数 $y(x)$ の収束半径を求めよ．

問 3　熱方程式の初期値境界値問題

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) && (0 < x < 1,\ 0 < t \leq 1) \\ u(0,x) &= u_0(x) && (0 < x < 1) \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0 && (0 \leq t \leq 1) \end{aligned}$$

の近似解を電子計算機の実数型データを利用して差分法により求めることを考える．このための差分スキームを 1 つ与え，そのスキームの安定性と収束性について説明せよ．ただし $u_0(x)$ は $u_0(0) = u_0(1) = 0$ を満たす滑らかな関数とする．