解析学 1

区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数の全体を X とする．X には一様ノルム

$$\|u\| = \max_{0 \le x \le 1} |u(x)|, \quad u \in X$$

が定まる．

(1) 写像 $T \colon X \to X$ は縮小写像，すなわち，$0 \le c < 1$ をみたす定数 c が存在して

$$\|Tu - Tv\| \le c\|u - v\| \qquad (u, v \in X)$$

が成り立つとする．このとき，$Tu = u$ をみたす $u \in X$ が唯一つ存在することを示せ．

(2) $f \in X$ とする．$u \in X$ に関する次の積分方程式 $(*)$ は，解を唯一つ持つことを示せ．

$$(*) \qquad u(x) = -\int_0^1 G(x, y)u(y)\,dy + f(x) \quad (0 \le x \le 1),$$

$$\text{ただし，}\ G(x, y) = \begin{cases} (1 - x)y & (0 \le y < x \le 1 \text{ のとき}) \\ (1 - y)x & (0 \le x \le y \le 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

解析学 2

$\mathbb{R}$ 上の実数値ルベーグ可積分関数 u に対して，

$$\|u\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |u(x)|\,dx$$

と定める．

(1) f を $\mathbb{R}$ 上の実数値ルベーグ可積分関数，ε を正の実数とする．$\|f - g\|_1 < \varepsilon$ をみたすような，$\mathbb{R}$ 上の連続でコンパクトな台を持つ実数値関数 g が存在することを示せ．

(2) f を $\mathbb{R}$ 上の実数値ルベーグ可積分関数とする．実数 t に対して，

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} |f(x + t) - f(x)|\,dx$$

と定める．このとき，$\varphi(t)$ は t に関する $\mathbb{R}$ 上の連続関数であることと，

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 2\|f\|_1$$

であることを示せ．

解析学 3

H を内積 $(\cdot,\cdot)$ を持つ実ヒルベルト空間とする．A は H を定義域とする H から H への線型な閉作用素で，ある正の実数 α に対して，

$$(Ax, x) \geq \alpha(x, x) \qquad (x \in H)$$

をみたしているとする．

(1) A の像集合 $A(H) = \{Ax \mid x \in H\}$ は H の閉部分空間であることを示せ．

(2) A は H から H への全単射であることを示し，さらに A の逆写像は H から H への有界線型写像であることを示せ．

解析学 4

次の問にそれぞれ答えよ．

問 1 次の極限値を求めよ．何らかの定理を援用するときは，定理の仮定がみたされていることを明確に示すこと．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx\sin x}{1+(nx)^{3/2}}\,dx$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx$

問 2 $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ を，$\mathbb{R}$ 上の実数値ルベーグ可測関数からなる通常の L^2 空間，L^∞ 空間とし，ノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ で表わす．

$h \in L^\infty(\mathbb{R})$ とする．$L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ への線型作用素 T を，$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$(Tf)(x) = h(x)f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

により $Tf \in L^2(\mathbb{R})$ を対応させることで定める．このとき，T の作用素ノルムは $\|h\|_\infty$ であることを示せ．

解析学 5

H を内積 $(\cdot,\cdot)$ をもつ実 Hilbert 空間とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) L, M は H の有限次元部分空間で，$\dim L < \dim M$ とする．このとき，M の元 x で，$x \neq 0$ であって任意の $y \in L$ に対して $(x, y) = 0$ となるものが存在することを示せ．

(2) $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ を H の有限次元部分空間の列とし，P_n は H から L_n への直交射影とする．有界線型作用素の列 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ が作用素ノルムで Cauchy 列になっていれば，数列 $\{\dim L_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であることを示せ．

解析学6

X を実ヒルベルト空間とし，その内積を $(\ ,\ )$ と表す．X 上の有界線型写像 $A : X \to X$ が，ある正数 α に対して $\alpha(x,x) \le (Ax,x)\ (x \in X)$ を満たしているとき，A の値域 $R(A)$ は X の閉部分空間であることを示せ．

解析学7

閉区間 $I = [0,1]$ 上の実数値連続関数の全体のなす線型空間を $C^0(I)$ と表す．$f \in C^0(I)$ に対して

$$\|f\|_{1/2} := \sup_{s,t \in I, s \ne t} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^{1/2}}$$

とし，$C^0(I)$ の部分集合 X を

$$X := \left\{ f \in C^0(I) \;\middle|\; f(0) = 0 \text{ かつ } \|f\|_{1/2} \text{ は有限値} \right\}$$

とする．

(1) X は $C^0(I)$ の線型部分空間であり，さらに $\|\cdot\|_{1/2}$ は線型空間 X のノルムになっていることを示せ．

(2) $f \in C^0(I)$ は $f(0) = 0$ であり，閉区間 I 上で 1 回連続的微分可能な関数とする．このとき $f \in X$ であることを示せ．

(3) m を正整数とし，$t_k = \frac{k}{m}\ (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$ とする．$f \in X$ に対して $\{(t_k, f(t_k))\}_{0 \le k \le m}$ を結んで得られる折れ線関数を f_m とする:

$$f_m(t) = m\big(f(t_{k+1}) - f(t_k)\big)(t - t_k) + f(t_k), \qquad (t_k \le t \le t_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

このとき $f_m \in X$ であることを示せ．

(4) $f \in X$ に対して (3) で与えられる $f_m \in X$ を対応させる写像を P_m とする．このとき P_m は X 上の有界線型写像であり，さらにその作用素ノルム $\|P_m\|$ は m に関して有界であることを示せ．

解析学8

$f(x)$ を実数 $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分関数とする．次の3つの命題のそれぞれについて「真」「偽」を述べ,「真」であれば証明し,「偽」であれば理由を付して反例を挙げよ．

命題 P： すべての $f(x)$ に対して $\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=0$ である．

命題 Q： $f(x)$ に対して

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t|x|}f(x)\,dx,\quad t>0$$

によって関数 $\varphi(t)$ を定めるとき，$\varphi(t)$ は $t>0$ で微分可能である．

命題 R： 各 $f(x)$ に対して，次の 2 条件を満たす実数 $\mathbb{R}$ 上の非負値で単調非減少な関数 $g(x)$ が存在する．

(1) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, (2) $f(x)g(x)$ は実数 $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分関数.

解析学9

$L^2(\mathbb{R})$ を実数 $\mathbb{R}$ 上のルベーグ2乗可積分関数全体のなすヒルベルト空間とし，r と h を正の定数とする．このとき，任意の $f(x)\in L^2(\mathbb{R})$ に対して，殆どすべての x に対して

$$r\,u(x-h)+(1+2r)\,u(x)+r\,u(x+h)=f(x)$$

を満たす $u(x)$ がヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ の元として唯1つ存在することを証明せよ．

解析学１０ 次の各問のそれぞれに答えよ．

問１　(1) V_n を n 次元複素計量線型空間とし，その内積を $(\ ,\ )$ とする．また $\{e_k\}_{k=1}^m$ (ただし $m \leq n$) を V_n の１組の正規直交系とする．このときすべての $v \in V_n$ に対して

$$\sum_{k=1}^{m} |(v, e_k)|^2 = (v, v)$$

が成立していれば，$m = n$ であって $\{e_k\}_{k=1}^n$ は V_n の正規直交基底であることを示せ．

(2) V を複素 pre-Hilbert 空間とし，その内積を $(\ ,\ )$ とする．また $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ を V の１組の正規直交系とする．このときすべての $v \in V$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(v, e_k)|^2 \leq (v, v) \qquad (*)$$

が成立することを示せ．また $(*)$ において等号がすべての v に対して成立しているとき，V は Hilbert 空間であるか．理由をつけて答えよ．

問２　$v(x)$ は $x \geq 1$ で定義された滑らかな実数値関数で，$v(1) = 0$ であって

$$0 \leq v(x) \leq (x-1)^2 + \int_1^x \frac{v(y)}{y-1} dy \quad (x \geq 1)$$

を満たしている．このとき $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{v(x)}{x^3}$ を求めよ．

解析学11 次の各問のそれぞれに答えよ．

問1　D を複素平面上の開円板 $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ とし，関数族 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F}=\{\, f \mid f \text{ は } D \text{ 上で正則であって，閉包 } \overline{D} \text{ 上で連続}\}$$

とする．$\mathcal{F}$ に自然な加法とスカラー倍を導入して $\mathbb{C}$ 上の線型空間とし，

$$\|f\| := \max_{z\in\overline{D}}|f(z)| \qquad (f\in\mathcal{F})$$

とするとき，$\mathcal{F}$ は $\|\cdot\|$ をノルムとする Banach 空間であることを証明せよ．

問2　H を Hilbert 空間とし，K を H の部分集合とする．このとき，K が Hilbert 空間 H の閉部分空間であるための必要十分条件は

$$K=(K^{\perp})^{\perp}$$

であることを証明せよ．但し，H の部分集合 A に対して，$A^{\perp}$ は H における A の直交補空間を表すものとする．