参考問題・数学 1

次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

参考問題・数学 2

M_2 を 2 次の実正方行列の全体がつくる実線型空間とし，M_2 上の線型写像 f を

$$f(X) = AXB \quad X \in M_2, \qquad \text{ただし } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

によって定める．このとき M_2 の基底

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

による線型写像 f の表現行列を求めよ.

参考問題・数学 3

線型写像 $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$ は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たしている.

1. $\mathbf{R^3}$ および $\mathbf{R^2}$ の標準基底による線型写像 f の表現行列を求めよ.
2. (1) で求めた行列の階数（rank）を求めよ.

参考問題・数学 4

空集合ではない集合 X と写像 $f : X \to X$ を考える．X の部分集合 A, B は空集合ではなく，$A \cap B$ も空集合ではないとき，次の (1), (2) は成立するか．成立するならば証明を与え，成立しないならば反例を挙げよ．ただし X の部分集合 Y に対して $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ を表すものとする．

1. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

参考問題・数学 5

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ とし，$x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ に対して $|x| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$ とする．ただし，T は転置を表す記号である．

(1) $a = (1, 0)^T \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\lim_{n\to\infty} \lambda^n |A^n a|$ が 0 とは異なる有限の極限値をもつために実数 λ の満たすべき必要十分条件を求めよ．

(2) 実数 λ が (1) で求めた条件を満たすとき，$\lim_{n\to\infty} \lambda^n |A^n b| = 0$ となる $b \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ．

参考問題・数学 6

数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，x_1 から順に

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{6},\ \cdots$$

となっている．このとき

$$\text{上極限} \quad \limsup_{n\to+\infty} \sin\frac{x_n}{2}\pi, \qquad \text{下極限} \quad \liminf_{n\to+\infty} \sin\frac{x_n}{2}\pi$$

の値を求めよ．

参考問題・数学 7

[　] は Gauss の記号で，実数 x に対して $[x]$ は x を越えない最大整数を表すものとする．このとき

$$\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{2003}+\frac{1}{2004}\right]$$

を求めよ．なお，必要があれば以下の表を用いてもよい．

x	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
$[e^x]$	148	244	403	665	1096	1808	2980

参考問題・数学 8

次の積分の値を求めよ．

$$\iint_{\mathbb{R}^2} x^2 e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$

参考問題・数学 9

$\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R^2}\mid -1\le x\le 1,\quad -1\le y-x\le 1\}$ とする．このとき二重積分

$$\int\int_{\Omega}(\cos\pi(x-y))^2\,dxdy$$

の値を求めよ．

参考問題・数学10

k は 1 より小さい正数とし，$\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数 $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ は

$$\frac{d}{dx}u_1(x)=u_2(x)u_3(x),\quad \frac{d}{dx}u_2(x)=-u_1(x)u_3(x),\quad \frac{d}{dx}u_3(x)=-k^2u_1(x)u_2(x),$$

$$u_1(0)=0,\quad u_2(0)=1,\quad u_3(0)=1$$

を満たしているものとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $(u_1(x))^2+(u_2(x))^2=1$ を示せ．

(2) $\sqrt{1-k^2}\le u_3(x)\le 1$ を示せ．

参考問題・数学11

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}} & (x>0),\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$$

と定義する。さらに $n=0,1,\ldots$ に対して、x の多項式 P_n を $P_0(x)=1$, $P_{n+1}(x)=x^2\bigl(P_n(x)-P_n'(x)\bigr)$ と帰納的に定義する。ただし $P_n'(x)$ は $P_n(x)$ の微分を表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1) f は $x=0$ で微分可能であることを示せ。

(2) 任意の $n=0,1,\ldots$ に対して $\lim_{x\to\infty} P_n(x)e^{-x}=0$ を示せ。

(3) f は $\mathbb{R}$ 上無限回微分可能であり、$n=0,1,\ldots$ に対して、f の n 階微分 $f^{(n)}$ は

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} & (x>0),\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$$

を満たすことを示せ。

参考問題・数学12

以下の問いに答えよ。

(1) a,b を $b>1$ かつ $2a=b^2+1$ をみたす実数とする。このとき、

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a-b\cos\theta}=\frac{4\pi}{b^2-1}$$

を示せ。

(2) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を $f(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-xy+xz+6x+4y$ で定義する。f は $\mathbb{R}^3$ 上で最小値を持つことを示し、その最小値を求めよ。

参考問題・数学13

以下の問いに答えよ。
(1) 次の行列の階数（ランク）を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の実行列 A の全ての固有値と、それらの固有値に属する固有空間の次元を求めよ。さらに A は対角化可能であることを示せ。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

参考問題・数学14

V を N 次元の実ベクトル空間、$f: V \to V$ を線型写像とする。自然数 n に対して f^n を f の n 回合成とする。すなわち $f^1 = f, f^2 = f \circ f, f^3 = f^2 \circ f, \ldots$ である。また線型写像 $h: V \to V$ に対して $\ker h = \{x | x \in V, h(x) = 0\}$ と定義する。
(1) 任意の自然数 n に対して $\ker f^n \subseteq \ker f^{n+1}$ を示せ。
(2) ある自然数 n に対して $\ker f^n = \ker f^{n+1}$ ならば、任意の $m \geq n$ に対して $\ker f^n = \ker f^m$ を示せ。
(3) $\ker f = \{0\}$ ならば任意の自然数 n に対して $\ker f^n = \{0\}$ を示せ。
(4) 任意の $x \in V$ に対してある自然数 m があって $f^m(x) = 0$ が成り立つとする。このとき任意の $x \in V$ に対して $f^N(x) = 0$ を示せ。

参考問題・数学15

正の実数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ を漸化式

$$x_1 = 2$$
$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \quad (n \geq 1)$$

で定義するとき以下の問いに答えよ。

(1) 任意の $n \geq 1$ で $x_n > x_{n+1} > \sqrt{2}$ をみたすことを示せ。

(2) $\{x_n\}_{n\geq 1}$ は $n \to \infty$ で収束することを示し、その極限の値を求めよ。

参考問題・数学16

任意の実数 α に対して、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\alpha i)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

を示せ。ただし $i = \sqrt{-1}$ である。

参考問題・数学17

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して、$\mathbb{R}^3$ の部分集合 H_a を

$$H_a = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}^3, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \right\}$$

と定義する。$\mathbb{R}^3$ を通常のベクトルの和およびスカラー倍に関する実ベクトル空間と考えるとき以下の問いに答えよ。

(1) 任意の $a \in \mathbb{R}^3$ に対して H_a は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示し、その次元を求めよ。

(2) $a, b \in \mathbb{R}^3$ に対して $H_a \cap H_b$ の次元が 1 となるための必要十分条件は a と b が 1 次独立であることを示せ。

参考問題・数学18

p, q を実数とするとき行列 $\begin{pmatrix} p & q & q \\ q & p & q \\ q & q & p \end{pmatrix}$ が逆行列を持つための必要十分条件は $p \neq q$ かつ $p + 2q \neq 0$ であることを示せ。さらにこの行列の階数（rank）が 1 となるための必要十分条件は $p = q \neq 0$ であることを示せ。

参考問題・数学19

n を自然数とし、A を n 行 n 列の複素数を成分とする行列とする。自然数 m に対して、A^m+A の i 行 j 列成分を $b_{ij}(m)$ と表す。任意の $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ に対して

$$\lim_{m\to\infty} b_{ij}(m)=\begin{cases}2 & i=j \text{ のとき},\\ 0 & i\neq j \text{ のとき}\end{cases}$$

が成り立つ。I,O をそれぞれ n 行 n 列の単位行列および零行列とするとき以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値は 1 のみであることを示せ。

(2) $(A-2I)(A-I)=O$ を示せ。

(3) $A=I$ を示せ。

参考問題・数学20

実数からなる数列 $\{a_n\}_{n\geq 1},\{b_n\}_{n\geq 1}$ に関する次の命題 (P)

(P) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が共に収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ も収束する。

について以下の問いに答えよ。

(1) 反例をあげることで、この命題 (P) は、偽であることを示せ。

(2) 任意の $n\geq 1$ に対して $a_n\geq 0$ かつ $b_n\geq 0$ ならば、上の命題 (P) は成立することを示せ。

参考問題・数学21

次の問いにそれぞれ答えよ。

(1) 空間内の 2 つの集合 $\{(x,y,z)|x^2+y^2\leq 1\}$ と $\{(x,y,z)|y^2+|z|\leq 1\}$ の交わりの部分の体積を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2-2x+2)}dx$ の値を求めよ。

参考問題・数学22

4 行 4 列の行列 A, B を次のように定義する。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき、${}^tPAP = B$ となる 4 行 4 列の正則な実行列 P は存在するか？（ただし、${}^tP$ は P の転置行列とする。）存在するなら、そのような P を一つ求め、存在しないなら、存在しないことを証明せよ。

参考問題・数学２３

$n = 1, 2, \ldots$ に対して、$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i$$

で定義する。ただし任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $x^0 = 1$ とする。さらに $f : [-1, 1) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = (1-x)^{-1}$ とおく。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $x \in [-1, 0]$ のとき、$|f_n(x) - f(x)| \leq |x|^{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$$

を示せ。

参考問題・数学２４

次の行列の階数 (rank) が 2 となるような実数の組 (a, b) を全て求めよ。

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & a \\ b & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

参考問題・数学２５

次の積分の値を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\sin\theta} d\theta$$

参考問題・数学２６

a を実数とし、3 行 3 列の行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -3 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

とおく。A が対角化可能でないような a の値をすべて求めよ。

参考問題・数学27

次の問題にそれぞれ答えよ。

(1) $c:[0,1]\to\mathbb{C}$ を $c(t)=2e^{2\pi it}$ と定義するとき、$\displaystyle\int_c \frac{z^2}{(1+z^3)}dz$ の値を求めよ。

(2) $\mathbb{R}^2$ 上で無限回微分可能である実数値関数 $f(x,y)$ に対して、$F(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ と定義する。このとき任意の $r>0$ と任意の $\theta\in\mathbb{R}$ に対して、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)$$
$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)+\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)$$

が成り立つことを示せ。

参考問題・数学28

次の問題にそれぞれ答えよ。

(1) $\begin{pmatrix}-3 & 2 & -2\\ 5 & -3 & 3\\ 11 & -7 & 7\end{pmatrix}$ は対角化可能か？

(2) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 4\\ 5 & -1 & 6 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ -4 & 3 & -7 & 2\end{pmatrix}$ の階数（rank）を求めよ。

参考問題・数学29

$\mathbb{C}[z]$ を複素数を係数とし z を変数とする多項式の全体とする。すなわち

$$\mathbb{C}[z]=\{f(z)|f(z)=a_mz^m+\cdots+a_1z+a_0, m\in\mathbb{N}, a_0,a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{C}\}$$

である。$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ を $\gamma(\theta)=e^{i\theta}$ とおき、$f,g\in\mathbb{C}[z]$ に対して、

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\overline{g(z)}\overline{z}dz$$

と定義する。このとき $(\cdot,\cdot)$ は複素ベクトル空間 $\mathbb{C}[z]$ の内積であり、任意の自然数 m に対して $(1,z,z^2,\ldots,z^m)$ は内積 $(\cdot,\cdot)$ に関する正規直交系であることを示せ。

参考問題・数学30

(1) $\epsilon > 0,\ m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} \leq 1 + \int_{1}^{m} \frac{1}{x^{1+\epsilon}} dx$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\epsilon > 0$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ は収束することを示せ。

(3) $\displaystyle\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ は $\epsilon \downarrow 0$ で収束することを示し、その極限を求めよ。